

Devoir commun – Révisions

SUITES

2021 - DC 1 – Suites

Le nombre d'arbres d'une forêt, en milliers d'unités, est modélisé par la suite (u_n) , où u_n désigne le nombre arbres, en milliers, au cours de l'année $(2020 + n)$.

En 2020, la forêt possède 50 000 arbres.

Afin d'entretenir cette forêt vieillissante, un organisme d'entretien des forêts décide d'abattre chaque année 5 % des arbres existants et de replanter 3 000 arbres.

1. Montrer que la situation peut être modélisée par :
 $u_0 = 50$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,95u_n + 3$.
2. (a) Combien d'arbres comptera la forêt en 2021 ? En 2022 ?
(b) Justifier que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = 60 - u_n$
(a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95.
(b) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n .
(c) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_n = 60 - 10 \times (0,95)^n$.
4. Déterminer le nombre d'arbres de la forêt en 2025. On donnera une valeur approchée arrondie à l'unité.
5. (a) Vérifier que pour tout entier naturel n , on a l'égalité $u_{n+1} - u_n = 0,5 \times (0,95)^n$.
(b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .
6. On souhaite déterminer l'année à partir de laquelle le nombre d'arbres de la forêt aura dépassé de 10 % le nombre d'arbres en 2020. On utilise pour cela la formule $u_{n+1} = 0,95u_n + 3$.

Recopier et compléter le programme Python ci-dessous pour qu'il renvoie le premier entier n tel que $u_n \geq 1,1u_0$.

```
from math import *
def dixpourcent() :
    u = 50
    n = 0
    while  :
        u = 
        n = n+1
    return n, u
```

7. Conjecturer la limite de la suite (u_n) et interpréter le résultat.

2021 - DC 1 – Suites – Corrigé

Le nombre d'arbres d'une forêt, en milliers d'unités, est modélisé par la suite (u_n) , où u_n désigne le nombre arbres, en milliers, au cours de l'année $(2020 + n)$.

En 2020, la forêt possède 50 000 arbres.

Afin d'entretenir cette forêt vieillissante, un organisme d'entretien des forêts décide d'abattre chaque année 5 % des arbres existants et de replanter 3 000 arbres.

1. Montrer que la situation peut être modélisée par : $u_0 = 50$ et pour tout entier

naturel n , $u_{n+1} = 0,95u_n + 3$.

u_n désigne le nombre d'arbres, en milliers, au cours de l'année $(2020 + n)$.

Ainsi, u_0 correspond au nombre d'arbres en 2020 donné en milliers d'arbres.

Comme il y en a 50 000, cela correspond à 50 milliers et donc $u_0 = 50$.

u_{n+1} désigne le nombre d'arbres, en milliers, au cours de l'année $(2020 + (n + 1))$.

Comme on décide d'abattre chaque année 5 % des arbres existants, cela signifie que le nombre d'arbres d'une année sur l'autre est multiplié par $:1 - \frac{5}{100}$, c'est-à-dire 0,95.

D'autre part, on replante 3 000 arbres, c'est-à-dire 3 milliers d'arbres.

Donc on a bien : $u_{n+1} = 0,95u_n + 3$.

2. (a) Combien d'arbres comptera la forêt en 2021 ? En 2022 ?

2021 = 2020 + 1, donc il s'agit de calculer de calculer u_1 .

$$\begin{aligned}u_1 &= u_0 \times 0,95 + 3 \\&= 50 \times 0,95 + 3 \\&= 50,5\end{aligned}$$

La forêt comptera donc 50 500 arbres en 2021.

2022 = 2020 + 2, donc il s'agit de calculer de calculer u_2 .

$$\begin{aligned}u_2 &= u_1 \times 0,95 + 3 \\&= 50,5 \times 0,95 + 3 \\&= 50,975\end{aligned}$$

La forêt comptera donc 50 975 arbres en 2022.

- (b) Justifier que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

• $u_1 - u_0 = 50,5 - 50 = 0,5$ et $u_2 - u_1 = 50,975 - 50,5 = 0,475$, ce qui prouve que la suite (u_n) n'est pas arithmétique (puisque $0,5 \neq 0,475$ et qu'on ne passe pas d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre).

• $\frac{u_1}{u_0} = \frac{50,5}{50} = 1,01$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{50,975}{50,5} \approx 1,009$, ce qui prouve que la suite (u_n) n'est pas géométrique (puisque $1,01 \neq 1,009$ et qu'on ne passe pas d'un terme au suivant en multipliant toujours le même nombre).

3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = 60 - u_n$

(a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95.

D'une part :

$$v_{n+1} = 60 - u_{n+1} \text{ car } v_n = 60 - u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

$$v_{n+1} = 60 - (0,95u_n + 3) \text{ car } u_{n+1} = 0,95u_n + 3 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

$$v_{n+1} = 60 - 0,95u_n - 3$$

$$v_{n+1} = 57 - 0,95u_n$$

D'autre part :

$$0,95 \times v_n = 0,95(60 - u_n) \text{ car } v_n = 60 - u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$0,95 \times v_n = 0,95 \times 60 - 0,95 \times u_n$$

$$0,95 \times v_n = 57 - 0,95u_n$$

D'où : $v_{n+1} = 0,95v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui prouve que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95.

(b) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n .

$$v_n = 60 - u_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ donc } v_0 = 60 - u_0 = 60 - 50 = 10.$$

D'après la question précédente, on déduit que :

$$v_n = v_0 \times q^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ c'est-à-dire : } v_n = 10 \times (0,95)^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

(c) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_n = 60 - 10 \times (0,95)^n$.

$$v_n = 60 - u_n \Leftrightarrow u_n = 60 - v_n \Leftrightarrow u_n = 60 - 10 \times (0,95)^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

4. Déterminer le nombre d'arbres de la forêt en 2025. On donnera une valeur approchée arrondie à l'unité.

$$2025 = 2020 + 5, \text{ donc il s'agit de calculer } u_5.$$

$$u_5 = 60 - 10 \times (0,95)^5 \approx 52,262$$

Le nombre d'arbres de la forêt sera donc égal à environ 52 262 en 2025.

5. (a) Vérifier que pour tout entier naturel n , on a l'égalité $u_{n+1} - u_n = 0,5 \times (0,95)^n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = 60 - 10 \times (0,95)^{n+1} - (60 - 10 \times (0,95)^n)$$

$$= 60 - 10 \times (0,95)^{n+1} - 60 + 10 \times (0,95)^n$$

$$= -10 \times (0,95)^n \times 0,95 + 10 \times (0,95)^n \times 1$$

$$= 10 \times (0,95)^n \times (1 - 0,95)$$

$$= 10 \times (0,95)^n \times 0,05$$

$$= 0,5 \times (0,95)^n$$

(b) En déduire le sens de variation de la suite (u_n) .

Pour étudier le sens de variation de la suite (u_n) , il suffit d'étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.

Or pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = 0,5 \times (0,95)^n \text{ avec } 0,5 > 0, (0,95)^n > 0 \text{ puisque } 0,95 > 0.$$

En appliquant la règle des signes du produit, on a :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$, ce qui prouve que la suite (u_n) est strictement croissante.

6. On souhaite déterminer l'année à partir de laquelle le nombre d'arbres de la forêt aura dépassé de 10 % le nombre d'arbres en 2020. On utilise pour cela la formule $u_{n+1} = 0,95u_n + 3$.

Recopier et compléter le programme Python ci-dessous pour qu'il renvoie le premier entier n tel que $u_n \geq 1,1u_0$.

```
from math import *  
def dixpourcent() :  
    u = 50  
    n = 0  
    while  $u < 55$  :  
        u =  $0,95u + 3$   
        n = n+1  
    return n, u
```

7. Conjecturer la limite de la suite (u_n) et interpréter le résultat.

Pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n = 60 - 10 \times (0,95)^n$.

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} (0,95)^n = 0$ car $0 < 0,95 < 1$.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 60 - 10 \times (0,95)^n = 60$, ce qui signifie que plus les années passeront, plus le nombre d'arbres de la forêt sera proche de 60 000 mais sans jamais atteindre ce nombre.