Devoir commun – Révisions

FONCTIONS - DERIVATIONS

2021 - DC 2 – *Dérivation 1*

Soit f la fonction définie sur $[-7;7]$ par $f(x) = \dfrac{3x+4}{x^2+1}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $[-7;7]$ et que $f'(x) = \dfrac{-3x^2-8x+3}{(x^2+1)^2}$
2. Dresser le tableau de variations de f en justifiant.
3. En déduire (aucune justification n'est attendue) :
   (a) le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[-7;7]$.
   (b) le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[-7;7]$.
   (c) le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[0;7]$.
   (d) le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[-7;0]$.
   (e) le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[-7;7]$.

2021 - DC 2 – *Dérivation 1* – *Corrigé*

Soit f la fonction définie sur $[-7;7]$ par $f(x) = \dfrac{3x+4}{x^2+1}$.

1. Montrer que $f'(x) = \dfrac{-3x^2-8x+3}{(x^2+1)^2}$

   f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u = 3x+4$ et $v = x^2+1$.
   On a donc : $u' = 3$ et $v' = 2x$.
   Ainsi $f'(x) = \dfrac{u'v - v'u}{v^2} = \dfrac{3 \times (x^2+1) - 2x \times (3x+4)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{-3x^2-8x+3}{(x^2+1)^2}$

2. Dresser le tableau de variations de f en justifiant.

   f' est le quotient de $-3x^2-8x+3$, polynôme du second degré par $(x^2+1)^2$, qui est un carré donc toujours positif (même ici strictement positif).
   f' sera donc du même signe que $-3x^2-8x+3$, c'est-à-dire du même signe que $a = -3$ excepté entre ses racines si elles existent.
   $\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times (-3) \times 3 = 64 + 36 = 100 > 0$.
   Il y a donc deux racines :
   $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{8-10}{-6} = \dfrac{1}{3}$
   et
   $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{8+10}{-6} = -3$

   On a alors sur $\mathbb{R}$ tout entier :

x	$-\infty$		-3		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   Or l'étude de $f(x)$ est faite sur $[-7;7]$, donc on obtient :

x	-7		-3		$\frac{1}{3}$		7
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
Variations de f	$-0{,}34$	$\searrow$	$-0{,}5$	$\nearrow$	$4{,}5$	$\searrow$	$0{,}5$

3. En déduire (aucune justification n'est attendue) :

   (a) le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[-7;7]$.
   Le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[-7;7]$ est $-0{,}5$ (atteint pour $x = -3$).

(b) le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[-7;7]$.
Le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[-7;7]$ est 4,5 (atteint pour $x = \frac{1}{3}$).

(c) le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[0;7]$.
$f(0) = 4$
Le minimum de la fonction f sur l'intervalle $[0;7]$ est 0,5 (atteint pour $x = 7$).

(d) le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[-7;0]$.
$f(0) = 4$
Le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[-7;0]$ est 4 (atteint pour $x = 0$).

(e) le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[-7;7]$.
L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $[-7;7]$.