

2021 - DC 2 – Dérivation 2

Un médicament est administré par voie orale. La concentration du produit actif dans le sang est modélisée par la fonction C qui, au temps écoulé x en heures après l'administration du médicament, associe la concentration $C(x)$ en milligramme par litre de sang ($mg.L^{-1}$). Cette fonction C est définie sur l'intervalle $[0; 12]$ par :

$$C(x) = 0,1x^3 - 2,4x^2 + 14,4x.$$

1. (a) Etudier les variations de la fonction C sur l'intervalle $[0; 12]$.
(b) Combien de temps après l'administration du médicament la concentration de celui-ci est-elle maximale dans le sang ?
2. On appelle vitesse d'élimination du principe actif à l'instant x le nombre $v(x)$ défini, pour tout $x \in [4; 12]$, par : $v(x) = |C'(x)| = -C'(x)$.
Cette vitesse est exprimée en $mg.L^{-1}.h^{-1}$.
 - (a) Quelle est la vitesse d'élimination 6 heures après l'administration du médicament ?
 - (b) Combien de temps après l'administration du médicament la vitesse d'élimination du principe actif est-elle maximale ?

2021 - DC 2 - Dérivation 2 - Corrigé

Un médicament est administré par voie orale. La concentration du produit actif dans le sang est modélisée par la fonction C qui, au temps écoulé x en heures après l'administration du médicament, associe la concentration $C(x)$ en milligramme par litre de sang ($mg.L^{-1}$). Cette fonction C est définie sur l'intervalle $[0; 12]$ par :

$$C(x) = 0,1x^3 - 2,4x^2 + 14,4x.$$

1. (a) Etudier les variations de la fonction C sur l'intervalle $[0; 12]$.

$$C'(x) = 0,3x^2 - 4,8x + 14,4.$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4,8)^2 - 4 \times 0,3 \times 14,4 = 57,6 > 0.$$

$$\sqrt{\Delta} = 2,4.$$

Il y a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4,8 - 2,4}{0,6} = \frac{2,4}{0,6} = 4$$

et

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4,8 + 2,4}{0,6} = \frac{7,2}{0,6} = 12$$

x	0	4	12
<i>Signe de $C'(x)$</i>	-	0	+
<i>Variations de C</i>	0	↗ 25,6 ↘	0

- (b) Combien de temps après l'administration du médicament la concentration de celui-ci est-elle maximale dans le sang ?

La concentration du médicament est maximale 4 heures après l'administration de celui-ci (elle est alors égale à $25,6 \text{ mg.L}^{-1}$.)

2. On appelle vitesse d'élimination du principe actif à l'instant x le nombre $v(x)$ défini, pour tout $x \in [4; 12]$, par : $v(x) = |C'(x)| = -C'(x)$.

Cette vitesse est exprimée en $mg.L^{-1}.h^{-1}$.

- (a) Quelle est la vitesse d'élimination 6 heures après l'administration du médicament ?

$$v(x) = |C'(x)| = -C'(x) = -0,3x^2 + 4,8x - 14,4.$$

$$\text{Donc } v(6) = -C'(6) = -0,3 \times 6^2 + 4,8 \times 6 - 14,4 = 3,6.$$

La vitesse d'élimination 6 heures après l'administration du médicament est égale à $3,6 \text{ mg.L}^{-1}.h^{-1}$.

- (b) Combien de temps après l'administration du médicament la vitesse d'élimination du principe actif est-elle maximale ?

v est une fonction polynôme du second degré qui est d'abord croissante, puis décroissante ($a = -0,3 < 0$). Elle admet donc bien un maximum x_0 pour lequel sa dérivée s'annule en changeant de signe :

$$v'(x) = -0,6x + 4,8, \text{ fonction affine d'abord positive, puis négative.}$$

$$v'(x) = 0 \Leftrightarrow -0,6x + 4,8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-4,8}{-0,6} = 8$$

La vitesse d'élimination du principe actif est donc maximale au bout de 8 heures.