

## Devoir commun

### SECOND DEGRE

#### **2022 - DC 1 – Second degré**

Un restaurant propose une formule "midi" à 8 euros. Son comptable a montré que pour  $x$  formules "midi" vendues, le coût de revient  $C$  (en euros) est donné par  $C(x) = 0,25x^2 - 12x + 175$ . On admet que  $x$  est un nombre réel de  $[0; 100]$

1. La recette totale  $R(x)$  pour  $x$  formules "midi" vendues est ce que le restaurant reçoit comme argent pour  $x$  formules "midi" vendues.
  - a. Calculer la recette totale  $R(10)$  pour 10 formules vendues.
  - b. Exprimer  $R(x)$  pour tout  $x \in [0, 100]$ .
  - c. Montrer que l'expression du bénéfice  $B(x)$  pour  $x$  formules "midi" vendues (avec  $x \in [0; 100]$ ) est :  $B(x) = -0,25x^2 + 20x - 175$ .
2. Ecrire  $B(x)$  sous forme canonique.
3. Résoudre  $B(x) = 125$  et en déduire le nombre de formules à vendre pour réaliser un bénéfice de 125 euros.
4. Dresser le tableau de variations de  $B$  sur l'intervalle  $[0; 100]$ .
5. Pour quelle valeur de  $x$  le bénéfice est-il maximal ? Quel est ce bénéfice maximal ?
6.
  - a. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $B(x) > 0$ .
  - b. En déduire combien de formules doivent être vendues pour réaliser un bénéfice positif.

## 2022 - DC 1 – Second degré – Corrigé

Un restaurant propose une formule "midi" à 8 euros. Son comptable a montré que pour  $x$  formules "midi" vendues, le coût de revient  $C$  (en euros) est donné par  $C(x) = 0,25x^2 - 12x + 175$ . On admet que  $x$  est un nombre réel de  $[0; 100]$

1. La recette totale  $R(x)$  pour  $x$  formules "midi" vendues est ce que le restaurant reçoit comme argent pour  $x$  formules "midi" vendues.

a. Calculer la recette totale  $R(10)$  pour 10 formules vendues.

$$R(10) = 8 \times 10 = 80$$

Pour 10 formules vendues, la recette est de 80 euros.

b. Exprimer  $R(x)$  pour tout  $x \in [0, 100]$ .

$$R(x) = 8 \times x = 8x \text{ pour tout } x \in [0, 100].$$

c. Montrer que l'expression du bénéfice  $B(x)$  pour  $x$  formules "midi" vendues (avec  $x \in [0; 100]$ ) est :

$$B(x) = -0,25x^2 + 20x - 175.$$

$$B(x) = R(x) - C(x)$$

$$B(x) = 8x - (0,25x^2 - 12x + 175)$$

$$B(x) = 8x - 0,25x^2 + 12x - 175$$

$$B(x) = -0,25x^2 + 20x - 175 \text{ pour tout } x \in [0, 100].$$

2. Ecrire  $B(x)$  sous forme canonique.

La forme canonique d'un polynôme du second degré  $f$  est :  $a(x - \alpha)^2 + \beta$  avec  $\alpha = \frac{-b}{2a}$  et  $\beta = f(\alpha)$ .

$$B(x) = -0,25x^2 + 20x - 175 \text{ pour tout } x \in [0, 100].$$

donc  $a = -0,25$ ,  $b = 20$  et  $c = -175$ .

$$\alpha = \frac{-b}{2a} = \frac{-20}{2 \times (-0,25)} = \frac{-20}{-0,5} = 40.$$

$$\beta = B(\alpha) = -0,25 \times 40^2 + 20 \times 40 - 175 = 225.$$

Finalement,  $B$  a pour forme canonique :  $B(x) = -0,25(x - 40)^2 + 225$ .

3. Résoudre  $B(x) = 125$  et en déduire le nombre de formules à vendre pour réaliser un bénéfice de 125 euros.

$$B(x) = 125 \Leftrightarrow -0,25(x - 40)^2 + 225 = 125$$

$$\Leftrightarrow -0,25(x - 40)^2 = -100$$

$$\Leftrightarrow (x - 40)^2 = \frac{-100}{-0,25}$$

$$\Leftrightarrow (x - 40)^2 = 400$$

$$\Leftrightarrow x - 40 = 20 \text{ ou } x - 40 = -20$$

$$\Leftrightarrow x = 60 \text{ ou } x = 20$$

Donc il faut vendre 20 ou 60 formules pour réaliser un bénéfice de 125 euros.

4. Dresser le tableau de variations de  $B$  sur l'intervalle  $[0; 100]$ .

Pour  $B$ ,  $a = -0,25 < 0$ , donc  $B$  est d'abord strictement croissante, puis strictement décroissante. On obtient donc le tableau de variations suivant :

$x$	0	40	100
$B(x)$	-175	225	-675

$$B(0) = -0,25 \times 0^2 + 20 \times 0 - 175 = -175.$$

$$B(100) = -0,25 \times 100^2 + 20 \times 100 - 175 = -675.$$

5. Pour quelle valeur de  $x$  le bénéfice est-il maximal ? Quel est ce bénéfice maximal ?

D'après la question précédente, le bénéfice est maximal pour 40 formules vendues et il est alors égal à 225 euros.

6. a. Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation  $B(x) > 0$ .

Il s'agit de résoudre  $B(x) > 0$ . Cela revient donc à étudier le signe de  $B(x)$ .

**$f(x) = ax^2 + bx + c$  est toujours du signe de  $a$  sauf entre ses racines lorsqu'elles existent.**

Ici on a :  $a = -0,25$ ,  $b = 20$  et  $c = -175$ .

Pour déterminer les racines de  $B$  (si elles existent) il faut calculer le discriminant  $\Delta$ .

$$\Delta = b^2 - 4ac.$$

$$\Delta = 20^2 - 4 \times (-0,25) \times (-175).$$

$$\Delta = 225$$

Comme  $\Delta$  est positif, l'équation  $B(x) = 0$  admet deux solutions réelles :

$$\begin{array}{ll} x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_1 = \frac{-20 - \sqrt{225}}{2 \times (-0,25)} & \text{et} \quad x_2 = \frac{-20 + \sqrt{225}}{2 \times (-0,25)} \\ x_1 = \frac{-20 - 15}{-0,5} & \text{et} \quad x_2 = \frac{-20 + 15}{-0,5} \\ x_1 = \frac{-35}{-0,5} = 70 & \text{et} \quad x_2 = \frac{-5}{-0,5} = 10 \end{array}$$

On a alors sur  $\mathbb{R}$  tout entier :

$x$	$-\infty$	10	70	$+\infty$	
<i>Signe de <math>B(x)</math></i>	-	0	+	0	-

Or l'étude de  $B(x)$  est faite sur  $[0; 100]$ , donc on obtient :

$x$	0	10	70	100	
<i>Signe de <math>B(x)</math></i>	$-$	$0$	$+$	$0$	$-$

En conclusion,  $B(x) > 0 \Leftrightarrow x \in ]10; 70[$

- b. En déduire combien de formules doivent être vendues pour réaliser un bénéfice positif.

Pour réaliser un bénéfice positif, il faut qu'il soit vendu de 11 à 69 formules.