Devoir commun – Révisions

SUITES

2022 - DC 2 – *Suites*

Partie A : QCM. Pour chaque question, indiquez l'unique bonne réponse sur votre copie.

1. La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2$ est :

   (a) géométrique de raison 3 ;

   (b) géométrique de raison -2 ;

   (c) arithmétique de raison -2 ;

   (d) ni arithmétique ni géométrique.

2. L'expression du terme général d'une suite arithmétique de premier terme $v_1 = 2$ et de raison -5 est :

   (a) $v_n = 2 - 5n$;

   (b) $v_n = -5 + 2n$;

   (c) $v_n = 7 - 5n$;

   (d) $v_n = 2 \times (-5)^n$.

3. La somme 2+4+6+...+200 est égale à :

   (a) 402 ;

   (b) 10 100 ;

   (c) 20 100 ;

   (d) 20 301.

Partie B : Problème

Une médiathèque a ouvert début 2017 et 3 200 personnes se sont incrites durant la première année. Chaque année, 75% des inscrits renouvellent leur abonnement et 500 nouvelles adhésions ont lieu. On modélise la situation par la suite (a_n) définie pour tout entier naturel n, où $a_0 = 3\,200$ est le nombre d'adhérents en 2017 et a_n le nombre d'inscrits l'année $2017 + n$.

1. Calculer a_1 et a_2.

2. On admet que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 0,75a_n + 500$ et on pose $b_n = a_n - 2\,000$.

   (a) Prouver que la suite (b_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,75$ et donner son premier terme.

   (b) Donner l'expression du terme général de la suite (b_n), et en déduire que pour tout entier naturel n, $a_n = 1\,200 \times (0,75)^n + 2\,000$.

   (c) Quel est le sens de variation de chaque suite ?

   (d) Conjecturer la limite de la suite (a_n). Que peut-on en déduire pour le nombre d'adhésions de cette médiathèque ?

3. On propose l'algorithme suivant :

   Donner le résultat obtenu à la fin de cet algorithme et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

```
n ← 0
A ← 3 200
Tant que (A > 2 100) :
    A ← 0,75 * A + 500
    n ← n + 1
Fin Tant que
Afficher n
```

4. L'abonnement coûte 15 € par an.
   On souhaite calculer le montant total des abonnements entre 2017 et 2025.

   (a) Calculer la somme $b_0 + b_1 + ... + b_8$.

   (b) En déduire que $a_0 + a_1 + ... + a_8 \approx 22\,400$, et conlure sur le montant total des abonnements entre 2017 et 2025.

2022 - DC 2 – *Suites* - *Corrigé*

Partie A

1. Réponse (d)

2. Réponse (c). Le terme général est $v_n = v_1 + (n-1)r = 2 - 5(n-1) = 7 - 5n$

3. Réponse (b). On reconnaît la somme des 100 premiers termes de la suite arithmétique de premier terme 2 et de raison 2. Sa valeur est $\frac{(99+1)(u_0+u_{99})}{2} = \frac{100(2+200)}{2} = 10\ 100$

Partie B

1. Après 1 an, 75 % des inscrits ont renouvelé leur inscription, soit $0{,}75 \times 3200 = 2\ 400$ inscrits. Et on ajoute 500 adhésions. On a donc $a_1 = 2\ 900$

De même $a_2 = 0{,}75a_1 + 500 = 2\ 675$

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} = a_{n+1} - 2000 = 0{,}75a_n + 500 - 2000 = 0{,}75a_n - 1500 = 0{,}75(a_n - 2000) = 0{,}75b_n$

Donc (b_n) est une suite géométrique de raison 0,75 et de premier terme $b_0 = a_0 - 2000 = 1200$

b. (b_n) est une suite géométrique de raison 0,75 et de premier terme 1200

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 1200 \times 0{,}75^n$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n + 2000 = 1200 \times 0{,}75^n + 2000$

c. Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= 1200 \times 0{,}75^{n+1} + 2000 - (1200 \times 0{,}75^n + 2000) \\ &= 1200(0{,}75^{n+1} - 0{,}75^n) \\ &= 1200 \times 0{,}75^n(0{,}75 - 1) \\ &= -0{,}25 \times 1200 \times 0{,}75^n < 0 \end{aligned}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} < a_n$

La suite (a_n) est strictement décroissante.

b_n est une suite géométrique de 1^er^ terme $b_0 = 1200 > 0$ et de raison q = 0,75 < 1

Donc la suite (b_n) est strictement décroissante.

d. Conjecture : $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 2000$

Au bout d'un grand nombre d'années, le nombre d'adhérents va se rapprocher puis se stabiliser à 2000.

3. On programme cet algorithme sur Python.

```
from math import *
n=0
A=3200
while A>2100:
    A=0.75*A+500
    n=n+1
print (n)
```

Le résultat est 9.

Donc pour que le nombre d'adhérents tombe en dessous de 2100, il faut attendre 9 ans.

4. a. (b_n) est une suite géométrique de raison 0,75 et de premier terme 1200 donc

$b_0 + b_1 + \cdots + b_8 = 1200 \times \frac{1-0{,}75^9}{1-0{,}75} = 4800(1 - 0{,}75^9) \simeq 4440$

b. $a_0 + a_1 + \cdots + a_8 = (b_0 + 2000) + (b_1 + 2000) + \cdots + (b_8 + 2000) \simeq 9 \times 2000 + 4440 \simeq 22\ 440$

On a donc bien $a_0 + a_1 + \cdots + a_8 \simeq 22\ 400$.

Il y a donc environ 22 400 adhésions sur la période, chacune a une valeur de 15 € donc le montant total des abonnements est environ $22400 \times 15 = 336\ 000$ €