avril 2009	MAI 2	Durée : 2 H	Coefficient : 2

BTS BLANC de : Mathématiques

La qualité de la rédaction ainsi que la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
L'usage des instruments de calcul et du formulaire officiel de mathématiques est autorisé.

EXERCICE I (10 points)

BTS MAI 1996 – Ex1 (paramètre q modifié)

Une machine fabrique plusieurs milliers de bouchons cylindriques par jour. On admet que la variable aléatoire X qui, à chaque bouchon, associe son diamètre exprimé en millimètres, suit la loi normale de moyenne $m = 22$ mm et d'écart-type $\sigma = 0,025$ mm.

Les bouchons sont acceptables si leur diamètre appartient à l'intervalle $[21,95; 22,05]$.

Les trois questions de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

1. Quelle est la probabilité qu'un bouchon pris au hasard dans la production soit acceptable ?

2. Dans cette question, on considère que la probabilité qu'un bouchon soit défectueux est $p = 0,05$.

On prélève au hasard un échantillon de 80 bouchons (ce prélèvement est assimilé à un tirage de 80 bouchons avec remise). On nomme Y la variable aléatoire mesurant le nombre de bouchons défectueux d'un tel échantillon.

a) Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire Y ? Déterminer l'espérance mathématique de la variable Y.

b) On approche Y par une variable aléatoire Y_1 qui suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Quelle est la valeur du paramètre λ ?

Calculer la probabilité que l'échantillon prélevé contienne exactement 10 bouchons défectueux.

3. En vue du contrôle de réglage de la machine, on prélève régulièrement dans la production des échantillons de 100 bouchons.

On appelle $\overline{X}$ la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 100 bouchons, associe le diamètre moyen des bouchons de cet échantillon.

Lorsque la machine est bien réglée, $\overline{X}$ suit la loi normale de paramètres m et $\sigma' = \sigma/10$ (on rappelle que $m = 22$ et $\sigma = 0,025$).

a) Déterminer le réel a tel que $P(22 - a \leqslant \overline{X} \leqslant 22 + a) = 0,95$.

b) Sur un échantillon de 100 bouchons, on a les résultats suivants (les mesures des diamètres étant réparties en classe d'amplitude 0,02 mm) :

Classes de diamètres	effectif correspondant
$[21,93; 21,95[$	3
$[21,95; 21,97[$	7
$[21,97; 21,99[$	27
$[21,99; 22,01[$	30
$[22,01; 22,03[$	24
$[22,03; 22,05[$	7
$[22,05; 22,07[$	2

En supposant que tous les bouchons d'une classe ont pour diamètre la valeur centrale de cette classe, donner la moyenne et l'écart-type de cette série (aucune justification demandée; résultats arrondis à l'ordre 10^{-4}).

En utilisant la question précédente, peut-on accepter au seuil de risque 5%, l'hypothèse selon laquelle la machine est bien réglée ?

EXERCICE II (10 points)

BTS MAI 2003 – Ex 2

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.

A. Résolution d'une équation différentielle

On considère l'équation différentielle (E): $y' + y = 2e^{-x}$

où y est une fonction de la variable réelle x, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et y' sa fonction dérivée.

1. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (Eo): $y' + y = 0$.

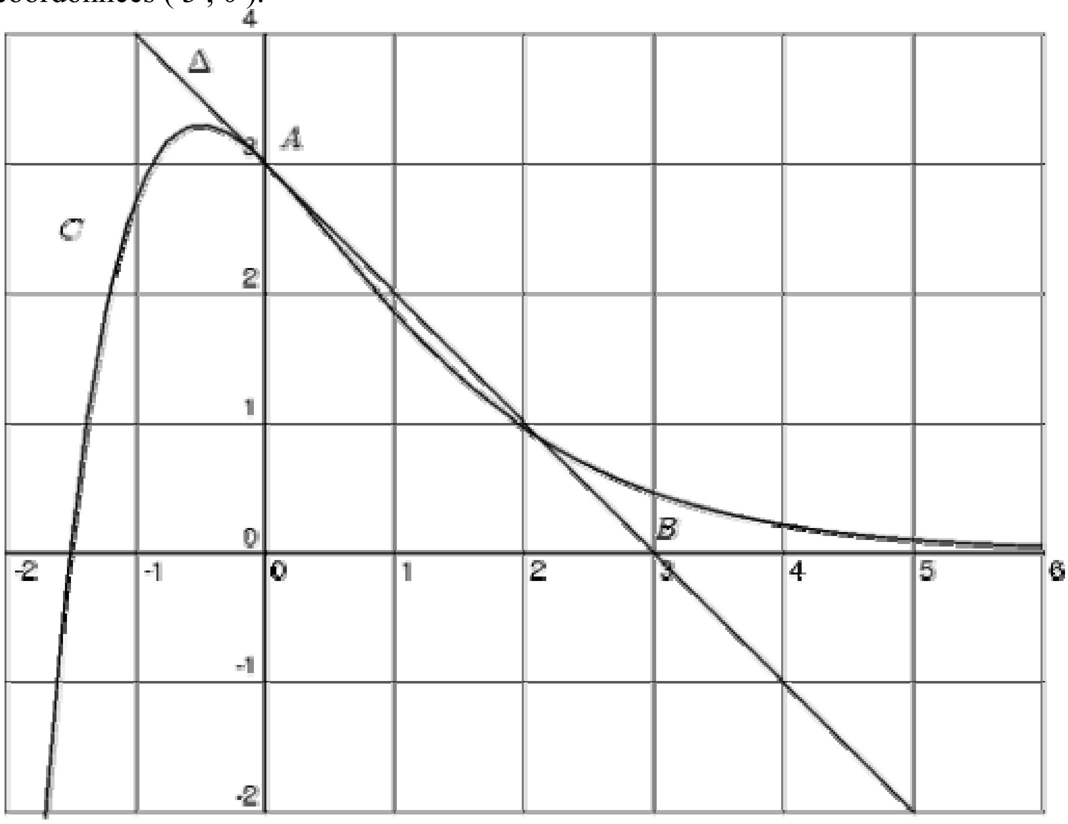
2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 2xe^{-x}$.
   Démontrer que la fonction h est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) dont la courbe représentative, dans un repère orthonormal, passe par le point de coordonnées (0 , 3).

B. Etude d'une fonction

1. La courbe C ci-dessous représente dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax + b)e^{-x}$, où a et b sont des nombres réels.
   La droite Δ est la tangente à la courbe C au point A d'abscisse 0. Cette tangente passe par le point B de coordonnées (3 , 0).



   a. Déterminer graphiquement f(0).

   b. Déterminer, graphiquement ou par le calcul, f '(0).

   c. Déterminer les valeurs des nombres réels a et b.

Dans la suite on admet que f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x + 3)\, e^{-x}$

2.

a. Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $f'(x) = (-2x - 1)\, e^{-x}$;

b. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $f'(x) \geq 0$;

c. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$
(on ne cherchera pas les limites en $-\infty$ et $+\infty$)

3.

a. Déterminer le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonctions $x \mapsto e^{-x}$.

b. Démontrer que le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de la fonction f est :

$$f(x) = 3 - x - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

C. Calcul intégral

1. La fonction f définie dans la partie B est une solution de l'équation différentielle (E) de la partie A.
Donc, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = -f'(x) + 2e^{-x}$.
En déduire une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

2. On note I = $\displaystyle\int_0^{1/2} f(x)\,dx$

   a. Démontrer que $I = 5 - 6e^{-\frac{1}{2}}$.

   b. Donner une valeur approchée arrondie à 10^{-3} de I.

3. On note J = $\displaystyle\int_0^{1/2} \left(3 - x - \frac{1}{2}x^2\right)\,dx$

   a. Démontrer que J = $\dfrac{65}{48}$

   b. Donner une valeur approchée à 10^{-3} de J.

   c. Vérifier que les valeurs approchées obtenues ci-dessus pour I et J diffèrent de moins de 10^{-2}.

CORRIGE

EXERCICE I (Source : Syracuse)

1. Soit A l'événement « *le bouchon est acceptable* ». Vu les conditions posées par l'énoncé, la probabilité de l'événement A est $p(A) = p(21,95 \leqslant X \leqslant 22,05)$.

Or la variable X suit la loi normale $\mathcal{N}(22; 0,025)$, donc la variable T définie par $T = \dfrac{X-22}{0,025}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$.

On a donc

$$\begin{aligned} p(A) = p(21,95 \leqslant X \leqslant 22,05) &= p(-0,05 \leqslant X-22 \leqslant 0,05) \\ &= p\left(\frac{-0,05}{0,025} \leqslant \frac{X-22}{0,025} \leqslant \frac{0,05}{0,025}\right) \\ &= p(-2 \leqslant T \leqslant 2) \\ &= 2\Pi(2) - 1 \quad \text{vu la symétrie de la courbe de la loi } \mathcal{N}(0,1) \\ &= 2 \times 0,9772 - 1 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{p(A) = 0,9544} \end{aligned}$$

2. *a*) Dans cette expérience, les 80 tirages sont indépendants (puisqu'avec remise), et il n'y a que deux issues possibles (bouchon défectueux ou non), l'issue qui nous intéresse ayant une probabilité de 0, 05. La variable Y suit donc la $\boxed{\text{loi binômiale } \mathcal{B}(80; 0,05)}$, et son espérance mathématique est $E(Y) = 80 \times 0,05$, soit $\boxed{E(Y) = 4}$.

b) La variable Y_1 suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Or le cours nous dit que la loi binômiale $\mathcal{B}(n, p)$ peut être approchée, sous certaines conditions, par la loi de poisson $\mathcal{P}(np)$ (on conserve la même valeur de l'espérance). Ici, le paramètre λ est donc $\boxed{\lambda = 4}$. Dans ce cas, on lit dans le formulaire que $\boxed{p(Y_1 = 10) = 0,005}$.

3. *a*) La variable aléatoire $\overline{X}$ suit la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma')$, donc la variable T définie par $T = \dfrac{\overline{X}-m}{\sigma'}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$. De la même façon qu'à la question **1.**, on a :

$$\begin{aligned} p\left(22 - a \leqslant \overline{X} \leqslant 22 + a\right) &= p\left(\frac{22-a-m}{\sigma'} \leqslant T \leqslant \frac{22+a-m}{\sigma'}\right) \\ &= p\left(-\frac{a}{\sigma'} \leqslant T \leqslant \frac{a}{\sigma'}\right) \\ &= 2\Pi\left(\frac{a}{\sigma'}\right) - 1 \quad \text{vu la symétrie de la courbe de la loi } \mathcal{N}(0,1) \end{aligned}$$

Pour avoir $p\left(22 - a \leqslant \overline{X} \leqslant 22 + a\right) = 0,95$, il faut donc avoir $2\Pi\left(\frac{a}{\sigma'}\right) - 1 = 0,95$, soit $\Pi\left(\frac{a}{\sigma'}\right) = 0,975$. Un coup d'œil sur le formulaire nous dit qu'alors, on doit avoir $a/\sigma' = 1,96$, soit $a = 1,96 \times \sigma'$. Finalement, on obtient $\boxed{a = 0,0049}$.

b) Le calcul des moyenne et écart-type de l'échantillon donne $\boxed{m = 21,9988}$ et $\boxed{\sigma \approx 0,2463}$.

La question précédente nous dit que si la machine est bien réglée, alors la moyenne des diamètres d'un échantillon a 95% de chances d'être dans l'intervalle $[21,9951; 22,0049]$. Comme la moyenne de notre échantillon est bien dans cet intervalle, on peut légitimement $\boxed{\text{accepter, au risque de 5\%, l'hypothèse}}$ selon laquelle la machine est bien réglée.

EXERCICE II (Source : Syracuse)

A **1.** On reconnaît une équation du type $y' = ay$ avec $a = -1$. Une primitive de a est $A = -x$, et la solution générale de (E_0) est donc $\boxed{y_0(x) = ke^{-x}}$ où k est une constante réelle quelconque.

2. On a $h(x) = 2xe^{-x}$, donc $h'(x) = (2 - 2x)e^{-x}$, et on vérifie que l'on a bien $h + h' = 2e^{-x}$, ce qui prouve que $\boxed{h(x) = 2xe^{-x} \text{ est une solution particulière de } (E)}$.

3. La solution générale de (E) est donc $\boxed{y(x) = (2x + k)e^{-x} \text{ où } k \text{ est une constante réelle quelconque.}}$

4. Si la courbe représentative de f passe par le point $(0; 3)$, c'est donc que l'on a $f(0) = 3$. On en déduit que $k = 3$, et par suite que $\boxed{f(x) = (2x + 3)e^{-x}}$.

B **1.** a) On a bien sûr $\boxed{f(0) = 3}$, b) et on a $\boxed{f'(0) = -1}$ puisque ce nombre représente le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

c) La condition $f(0) = b = 3$ nous donne immédiatement b. Et comme $f'(x) = (a - ax - b)e^{-x}$, il vient $f'(0) = a - b = 3$, et par suite $a = 2$. On a donc finalement $\boxed{(a, b) = (2, 3)}$ et $\boxed{f(x) = (2x + 3)e^{-x}}$.

2. a) On a facilement $\boxed{f'(x) = (-2x - 1)e^{-x}}$, qui est du signe de $-2x - 1$ puisque e^{-x} est toujours strictement positif. D'où le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$-1/2$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	$2\sqrt{e}$	$\searrow$	

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2e^{1/2} = 2\sqrt{e}$$

3. a) Connaissant le développement limité de e^t en 0, on en déduit facilement

$$\boxed{e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0}$$

b) Et le produit de ce DL par le polynôme $(2x + 3)$ nous donne

$$(2x + 3)e^{-x} = (2x + 3)\left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) + x^2\varepsilon(x) = 3 + 2x - 3x + \frac{3}{2}x^2 - 2x^2 + x^2\varepsilon(x)$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{f(x) = 3 - x - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.}$$

C **1.** Il vient

$$f(x) = -f'(x) + 2e^{-x} \quad \Longrightarrow \quad \int f(x)\,dx = -\int f'(x)\,dx + \int 2e^{-x}\,dx \qquad \text{soit} \qquad \int f(x)\,dx = -f(x) - 2e^{-x}$$

d'où une primitive de f : $\boxed{F(x) = -f(x) - 2e^{-x} = (-2x - 5)e^{-x}}$

2. Le calcul de l'intégrale I donne alors

$$I = \int_0^{1/2} f(x)\,dx = F\left(\frac{1}{2}\right) - F(O) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{I = -6e^{1/2} + 5 \approx 1,361}$$

3. Pour J, il vient

$$J = \int_0^{1/2} \left(3 - x - \frac{1}{2}x^2\right) dx = \left[3x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}x^3\right]_0^{1/2} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{J = \frac{65}{48} \approx 1,354}$$

Et la différence $\boxed{J - I \approx -6,649 \cdot 10^{-3} \text{ est bien inférieure à } 10^{-2}}$.