MAI 2 — DS DE MATHEMATIQUES — 1 H

Loi Binomiale – Loi de Poisson – Loi Normale

EXERCICE 1

Une entreprise industrielle de BTP fabrique des voussoirs en béton destinés à la construction d'ouvrages d'art autoroutiers.
Chaque voussoir a une masse qui varie en fonction des dosages du béton ayant servi à les fabriquer.
On désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque voussoir, associe sa masse.
On estime que X suit la loi normale de moyenne 50 et d'écart type 0,26.

1) Quelle est la probabilité de l'événement : " $X \geq 50{,}2$ " ?

2) On ne peut utiliser que les voussoirs dont la masse M est telle que $49{,}5 \leq M \leq 50{,}5$, les autres sont défectueux et doivent être détruits.
Quelle est la probabilité qu'un voussoir, pris au hasard dans la production, soit utilisable ?

EXERCICE 2

Une machine fabrique des rondelles d'acier.
Le diamètre d'une rondelle suit une loi normale de moyenne m = 90 mm et d'écart type σ = 0,16 mm.

1°) a) Quelle est la probabilité pour que le diamètre d'une rondelle prise au hasard soit extérieur à l'intervalle
[89,7 mm; 90,3 mm] ?
b) Trouver le nombre d tel que la proportion de rondelles ayant un diamètre compris entre 90 - d et 90 + d soit 90 %.

2°) On rejette les pièces dont le diamètre est extérieur à l'intervalle [89,7 mm; 90,3 mm].
La probabilité qu'une pièce soit jugée défectueuse est 0,06.
D'un lot contenant un très grand nombre de rondelles, on tire N pièces.
On appelle X la variable aléatoire qui à cette épreuve associe le nombre de rondelles défectueuses.

a) On tire 4 pièces (soit N = 4).
i) Quelle est la loi de probabilité suivie par X ? Quels sont ses paramètres ?
ii) Quelle est l'expression de P (X =k) ? (P (X =k) signifie « probabilité pour que X - k »).
iii) Calculer la probabilité P_1 pour que l'on ait 1 pièce acceptable exactement.
iv) Calculer la probabilité P_2 pour que l'on ait au moins 2 pièces acceptables.

b) On tire 50 pièces.
On admet que la loi suivie par X peut être approchée par une loi de Poisson dont on précisera le paramètre. Quelle est alors l'expression de P (X = k)?
i) Calculer la probabilité P_3 de n'avoir aucune pièce défectueuse.
ii) Calculer la probabilité P_4 d'avoir au plus 2 pièces défectueuses.

CORRIGE

EXERCICE 1

$X \sim \mathcal{N}(m=50 \,;\, \sigma=0{,}26)$

1°) On pose $T = \dfrac{X-m}{\sigma} = \dfrac{X-50}{0{,}26}$ alors $T \sim \mathcal{N}(0,1)$

$P(X \geq 50{,}2) = P(T \geq 0{,}77) = 1 - P(T < 0{,}77)$
$= 1 - \Pi(0{,}77) = 1 - 0{,}7794 = \underline{0{,}2206}$

2°) $P(49{,}5 \leq X \leq 50{,}5) = P(-1{,}92 \leq X \leq 1{,}92)$

$= \Pi(1{,}92) - \Pi(-1{,}92) = \Pi(1{,}92) - (1 - \Pi(1{,}92))$

$= 2 \times \Pi(1{,}92) - 1 = 2 \times 0{,}9726 - 1 = \boxed{0{,}9452}$

EXERCICE 2

Désignons par D la variable aléatoire mesurant le diamètre

1°) a) On pose $T = \dfrac{D-m}{\sigma} = \dfrac{D-90}{0{,}16}$ $\quad T \sim \mathcal{N}(0,1)$

$P(89{,}7 \leq D \leq 90{,}3) = P(-1{,}875 \leq T \leq 1{,}875)$

$= \Pi(1{,}875) - \Pi(-1{,}875) = 2\Pi(1{,}875) - 1$
$= 2 \times 0{,}9696 - 1 = \underline{0{,}9392}$

donc $p = 1 - 0{,}9392 = \boxed{0{,}0608}$

b) $P(90 - d \leq D \leq 90 + d) = 0{,}9$

$\Rightarrow P\left(-\dfrac{d}{0{,}16} \leq T \leq \dfrac{d}{0{,}16}\right) = \boxed{0{,}9}$

$\Rightarrow 2\Pi\left(\frac{d}{0{,}16}\right) - 1 = 0{,}9 \Rightarrow \Pi\left(\frac{d}{0{,}16}\right) = 0{,}95$

$\Rightarrow \frac{d}{0{,}16} = 1{,}645$. (lecture inverse de la table)

$\Rightarrow \underline{d = 0{,}2632}$

2°) a) i) Pour chaque pièce prélevée il y a 2 issues possibles, soit elle est défectueuse, soit elle ne l'est pas. On répète 4 fois de manière identique et indépendante.

X suit la loi binômiale de paramètres $\begin{cases} n = 4 \\ p = 0{,}06 \end{cases}$.

ii) $P(X=k) = C_4^k \, (0{,}06)^k \, (0{,}94)^{4-k}$

iii) $P_1 = P(X=3) \simeq \boxed{8{,}12 \times 10^{-4}}$

iv) $P_2 = P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$

$P_2 \simeq \boxed{0{,}99}$.

b) $\underline{\lambda = np = 3}$ $\qquad P(X=k) = e^{-3} \times \frac{3^k}{k!}$

i) $P_3 = P(X=0) = e^{-3} \simeq \boxed{0{,}050}$

ii) $P_4 = P(X \leq 2) = \left(1 + 3 + \frac{9}{2}\right) e^{-3} \simeq \boxed{0{,}42}$