

Commun à tous les candidats

Les probabilités demandées dans cet exercice seront arrondies à 10^{-3} .

Un laboratoire pharmaceutique vient d'élaborer un nouveau test anti-dopage.

Partie A

Une étude sur ce nouveau test donne les résultats suivants :

- si un athlète est dopé, la probabilité que le résultat du test soit positif est 0,98 (sensibilité du test);
- si un athlète n'est pas dopé, la probabilité que le résultat du test soit négatif est 0,995 (spécificité du test).

On fait subir le test à un athlète sélectionné au hasard au sein des participants à une compétition d'athlétisme.

On note D l'évènement « l'athlète est dopé » et T l'évènement « le test est positif ».

On admet que la probabilité de l'évènement D est égale à 0,08.

1. Traduire la situation sous la forme d'un arbre pondéré.
2. Démontrer que $P(T) = 0,083$.
3.
 - a. Sachant qu'un athlète présente un test positif, quelle est la probabilité qu'il soit dopé?
 - b. Le laboratoire décide de commercialiser le test si la probabilité de l'évènement « un athlète présentant un test positif est dopé » est supérieure ou égale à 0,95.
Le test proposé par le laboratoire sera-t-il commercialisé? Justifier.

Partie B

Dans une compétition sportive, on admet que la probabilité qu'un athlète contrôlé présente un test positif est 0,103.

1. Dans cette question 1, on suppose que les organisateurs décident de contrôler 5 athlètes au hasard parmi les athlètes de cette compétition.
On note X la variable aléatoire égale au nombre d'athlètes présentant un test positif parmi les 5 athlètes contrôlés.
 - a. Donner la loi suivie par la variable aléatoire X . Préciser ses paramètres.
 - b. Calculer l'espérance $E(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
 - c. Quelle est la probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif?
2. Combien d'athlètes faut-il contrôler au minimum pour que la probabilité de l'évènement « au moins un athlète contrôlé présente un test positif » soit supérieure ou égale à 0,75? Justifier.

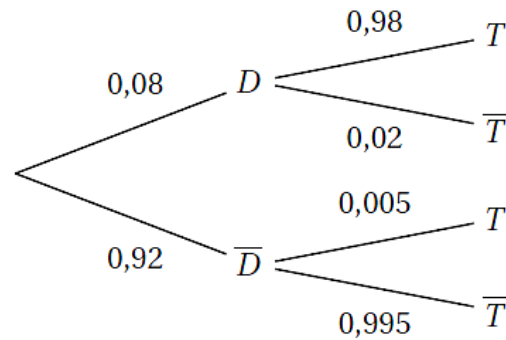
EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

Partie A

1.



2. D'après la loi des probabilités totales :

$$P(T) = P(D \cap T) + P(\overline{D} \cap T) : \text{or}$$

$$P(D \cap T) = P(D) \times P_D(T) = 0,08 \times 0,98 = 0,0784 \text{ et}$$

$$P(\overline{D} \cap T) = P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(T) = 0,92 \times 0,005 = 0,00460. \text{ Donc :}$$

$$P(T) = 0,0784 + 0,0046 = 0,083.$$

3. a. La probabilité conditionnelle $P_T(D) = \frac{P(T \cap D)}{P(T)} = \frac{P(D \cap T)}{P(T)} = \frac{0,0784}{0,083} \approx 0,9445$, soit 0,945 au millièmè près.
- b. D'après la question précédente $0,945 < 0,95$, donc le test ne sera pas commercialisé.

Partie B

1. a. Quel que soit l'athlète choisi la probabilité que cet athlète présente un test positif est 0,103. La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0,103$.
- b. On sait que $E = n \times p = 5 \times 0,103 = 0,515$: ceci montre que sur un grand nombre de contrôles, il y aura à peu près 1 athlète sur 10 contrôlé positif.
- c. La probabilité qu'aucun athlète ne soit contrôlé positif est :
 $0,103^0 \times (1 - 0,103)^5 = 0,897^5 \approx 0,5807$ soit environ 0,581 au millièmè près.
 Donc la probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif est :
 $1 - 0,581$, soit 0,419 au millièmè près.

2. On a pour n athlètes contrôlés, $P(X = 0) = 0,103^0 \times 0,897^n = 0,897^n$.Il faut donc trouver n tel que :

$$1 - 0,897^n \geq 0,75 \iff 1 - 0,75 \geq 0,897^n \iff 0,25 \geq 0,897^n.$$

La calculatrice donne le plus petit $n \in \mathbb{N}$ vérifiant cette inéquation : pour $n = 13$, on a $0,897^{13} \approx 0,243$.

Il faut donc contrôler 13 athlètes en moyenne pour en trouver un positif.