EXERCICE 2 **5 points**

Un biologiste s'intéresse à l'évolution de la population d'une espèce animale sur une île du Pacifique.
Au début de l'année 2020, cette population comptait 600 individus. On considère que l'espèce sera menacée d'extinction sur cette île si sa population devient inférieure ou égale à 20 individus.
Le biologiste modélise le nombre d'individus par la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{lll} u_0 & = & 0,6 \\ u_{n+1} & = & 0,75u_n(1-0,15u_n) \end{array}\right.$$

où pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année $2020+n$.

1. Estimer, selon ce modèle, le nombre d'individus présents sur l'île au début de l'année 2021 puis au début de l'année 2022.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par

$$f(x) = 0,75x(1-0,15x).$$

2. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ et dresser son tableau de variations.

3. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,1]$ l'équation $f(x) = x$.

On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

4. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.

b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

c. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).

5. Le biologiste a l'intuition que l'espèce sera tôt ou tard menacée d'extinction.

a. Justifier que, selon ce modèle, le biologiste a raison.

b. Le biologiste a programmé en langage Python la fonction **menace()** ci-dessous :

```
def menace()
    u = 0,6
    n = 0
    while u > 0,02
        u = 0,75*u*(1-0,15*u)
        n = n+1
    return n
```

Donner la valeur numérique renvoyée lorsqu'on appelle la fonction menace().
Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

CORRIGE

EXERCICE 2 **5 points**

$$\begin{cases} u_0 & = & 0,6 \\ u_{n+1} & = & 0,75u_n(1-0,15u_n) \end{cases}$$

où pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année $2020+n$.

1. • 2021 correspond à $n=1$, donc $u_1 = 0,75u_0 \times (1-0,15u_0) = 0,75 \times 0,6 \times (1-0,15 \times 0,6) = 0,45 \times (1-0,09) = 0,45 \times 0,91 = 0{,}4095$ soit environ 410 individus.

   • 2022 correspond à $n=2$, donc $u_2 = 0,75u_1 \times (1-0,15u_1) = 0,75 \times 0{,}4095 \times (1-0,15 \times 0{,}4095) = 0{,}307\,125 \times (1-0{,}061\,425) = 0{,}307\,125 \times 0{,}938\,575) \approx 0{,}2282$ soit environ 228 individus.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;\,1]$ par

$$f(x) = 0,75x(1-0,15x).$$

2. f est une fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0;\,1]$ et sur cet intervalle :

   $f'(x) = 0,75(1-0,15x) - 0,75x \times 0,15 = 0,75 - 0{,}1125x - 0{,}1125x = 0,75 - 0,225x.$

   Or $0 \leqslant x \leqslant 1 \Rightarrow 0 \leqslant 0,225x \leqslant 0,225 \Rightarrow -0,225 \leqslant -0,225x \leqslant 0 \Rightarrow$

   $0,75-0,225 \leqslant 0,75-0,225x \leqslant 0,75$ ou enfin $0,525 \leqslant f'(x) \leqslant 0,75$.

   Sur $[0;\,1]$, $f'(x) > 0$, donc $f$est strictement croissante de $f(0) = 0$ à $f(1) = 0,75 \times 0,85 = 0{,}6375$.

3. Sur $[0;\,1]$, $f(x) = x \iff 0,75x(1-0,15x) = x \iff 0,75x(1-0,15x) - x = 0$

$$\begin{aligned} &\iff x[0,75(1-0,15x)-1] = 0 \iff x(0,75-0{,}1125x-1) = 0 \\ &\iff x(-0,25-0{,}1125x) = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad -0,25-0{,}1125x = 0 \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad -0,25 = 0{,}1125x \\ &\iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{0,25}{0{,}1125} = -\frac{20}{9} \end{aligned}$$

Or $-\dfrac{20}{9} < 0$ donc dans $[0;\,1]$, $S = \{0\}$.

On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

4. **a.** *Initialisation* : on a vu que $0 \leqslant 0{,}4095 \leqslant 0,6 \leqslant 1$, soit $0 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 1$: la relation est vraie au rang 0;

Hérédité : Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait :

$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$; la fonction f étant strictement croissante sur $[0;\ 1]$, on a donc : $f(0) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1)$,

soit puisque $f(0) = 0$ et $f(1) = 0,75 \times (1 - 0,15) = 0{,}6375 \leqslant 1$:

$0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$: la relation est donc vraie au rang $n+1$.

Conclusion : la relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n naturel quelconque, elle est vraie au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence :

Pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.

b. La suite (u_n) est d'après la question précédente décroissante et minorée par 0; elle est donc est convergente.

c. Le résultat précédent montre que la suite (u_n) converge vers un nombre $\ell \geqslant 0$ et ce nombre ℓ vérifie l'équation $f(x) = x$, dont on a vu à la question **3.** qu'elle n'avait que 0 comme solution.

Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell = 0$.

5. **a.** L'étude précédente a montré que le nombre d'individus décroit, donc le biologiste a raison puisque la limite de la suite du nombre d'individus est égale à zéro.

b. L'algorithme calcule les termes de la suite tant que ceux-ci sont supérieurs à 0,02

Il s'arrête à $n = 11$ car $u_{10} \approx 0,019$

L'espèce sera donc menacée d'extinction en 2031.