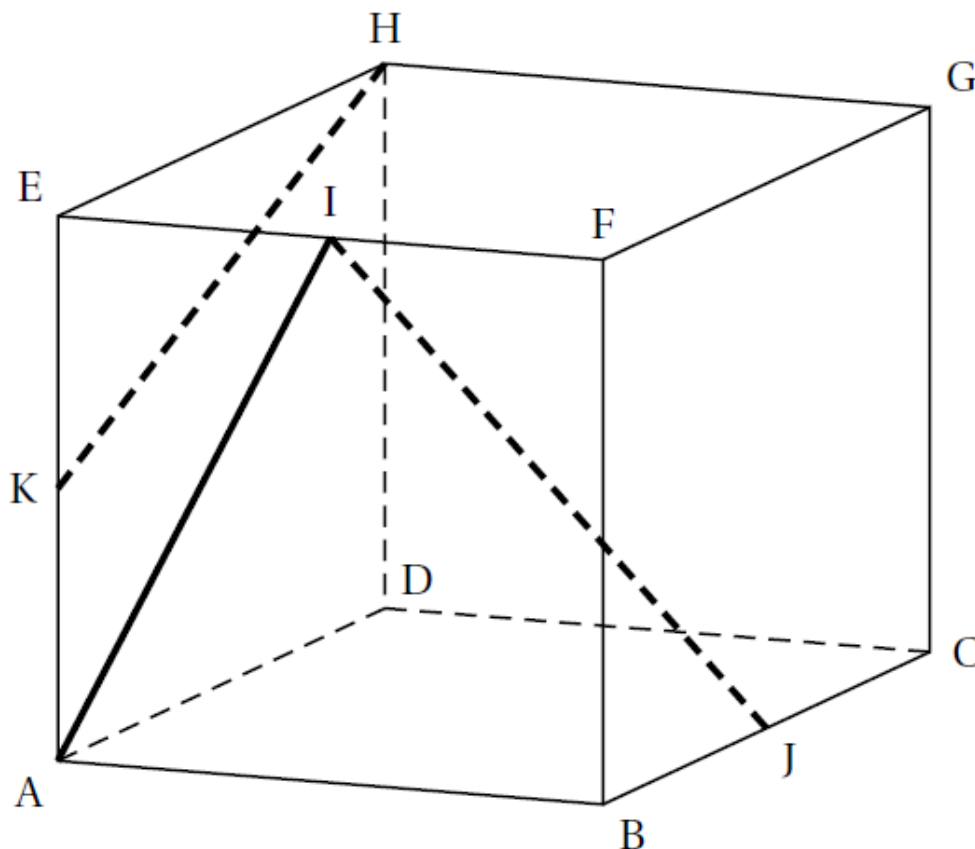


EXERCICE 3**5 points****Commun à tous les candidats****Les questions 1. à 5. de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante**

On considère un cube ABCDEFGH. Le point I est le milieu du segment [EF], le point J est le milieu du segment [BC] et le point K est le milieu du segment [AE].



1. Les droites (AI) et (KH) sont-elles parallèles? Justifier votre réponse,

Dans la suite, on se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

2. a. Donner les coordonnées des points I et J.
b. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + 3y - 2z + 2 = 0$ ainsi que les droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques ci-dessous :

$$d_1: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 8 - 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_2: \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 + t \\ z = 8 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

3. Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles? Justifier votre réponse.
4. Montrer que la droite d_2 est parallèle au plan $\mathcal{P}$.
5. Montrer que le point $L(4; 0; 3)$ est le projeté orthogonal du point $M(5; 3; 1)$ sur le plan $\mathcal{P}$.

EXERCICE 3

5 points

Commun à tous les candidats

En prenant le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ on a :

$$A(0; 0; 0), B(0; 0; 0), C(1; 1; 0), D(0; 1; 0), E(0; 0; 1)$$

$$F(1; 0; 1), G(1; 1; 1), H(0; 1; 1), I(0,5; 0; 1), J(1; 0,5; 0), K(0; 0; 0,5)$$

1. On a $\overrightarrow{AI}(0,5; 0; 1)$ et $\overrightarrow{KH}(0; 1; 0,5)$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites (AI) et (KH) ne sont pas parallèles.
2.
 - a. Voir plus haut.
 - b. On a $\overrightarrow{IJ}(0,5; 0,5; -1)$, $\overrightarrow{AE}(0; 0; 1)$ $\overrightarrow{AC}(1; 1; 0)$.
On a $2\overrightarrow{IJ} + 2\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC}$.
Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est donc une combinaison des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AE}$: ces trois vecteurs sont donc coplanaires.
3. d_1 a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}(1; -2; 3)$ et d_2 a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}(1; 1; 2)$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles
4. Le plan a pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{p}(1; 3; -2)$ et d_2 a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}(1; 1; 2)$.
Or $\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{u_2} = 1 + 3 - 4 = 0$: les vecteurs sont orthogonaux donc la droite d_2 est parallèle au plan $\mathcal{P}$.

5. Méthode 1

Soit Δ la perpendiculaire à $\mathcal{P}$ contenant M. Cette droite a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{p}$, donc une équation paramétrique de Δ est :

$$\begin{cases} x = 5 + 1t \\ y = 3 + 3t \\ z = 1 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Le projeté L, de M sur le plan $\mathcal{P}$ a ses coordonnées qui vérifient les quatre équations :

$$\begin{cases} x = 5 + 1t \\ y = 3 + 3t \\ z = 1 - 2t \\ x + 3y - 2z + 2 = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \Rightarrow 5 + t + 3(3 + 3t) - 2(1 - 2t) + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$5 + t + 9 + 9t - 2 + 4t + 2 = 0 \Leftrightarrow 14t + 14 = 0 \Leftrightarrow t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1.$$

En reportant dans les trois premières équations du système, on trouve les coordonnées de L projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$:

$$\begin{cases} x = 5 - 1 \\ y = 3 + 3 \times (-1) \\ z = 1 - 2 \times (-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$

Donc le projeté orthogonal de M sur le plan $\mathcal{P}$ est le point L(4; 0; 3).

Méthode 2

On a $\overrightarrow{ML}(-1; -3; 2)$, donc $\overrightarrow{ML} = -\overrightarrow{p}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

D'autre part $L(4; 0; 3) \in \mathcal{P} \Leftrightarrow 4 + 3 \times 0 - 2 \times 3 + 2 = 6 - 6 = 0$ est vraie, donc L est le projeté orthogonal de M sur le plan $\mathcal{P}$.