EXERCICE AU CHOIX DU CANDIDAT

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B.

Il indique sur sa copie l'exercice choisi : exercice A ou exercice B.

Exercice A — 5 points

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
On justifiera chaque réponse.

Affirmation 1 : Pour tous réels a et b, $\left(\mathrm{e}^{a+b}\right)^2 = \mathrm{e}^{2a} + \mathrm{e}^{2b}$.

Affirmation 2 : Dans le plan muni d'un repère, la tangente au point A d'abscisse 0 à la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2 + (3 - x)\mathrm{e}^x$ admet pour équation réduite $y = 2x + 1$.

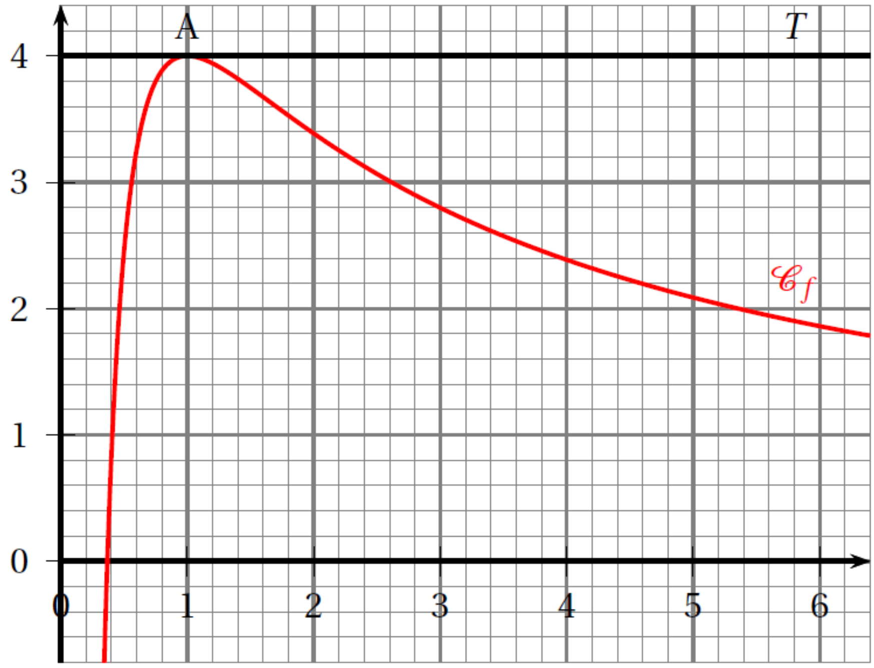
Affirmation 3 : $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x + \dfrac{3}{x} = 0$.

Affirmation 4 : L'équation $1 - x + \mathrm{e}^{-x} = 0$ admet une seule solution appartenant à l'intervalle $[0\,;\,2]$.

Affirmation 5 : La fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 - 5x + \mathrm{e}^x$ est convexe.

EXERCICE B **5 points**

Dans le plan muni d'un repère, on considère ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f, deux fois dérivable sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
La courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale T au point A(1 ; 4).



1. Préciser les valeurs $f(1)$ et $f'(1)$.

On admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels.}$$

2. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f'(x) = \frac{b - a - b\ln x}{x^2}.$$

3. En déduire les valeurs des réels a et b.

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{4 + 4\ln x}{x}.$$

4. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

5. Déterminer le tableau de variations de f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

6. Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$f''(x) = \frac{-4 + 8\ln x}{x^3}.$$

7. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ possède un unique point d'inflexion B dont on précisera les coordonnées.

CORRIGE

Exercice A **5 points**

Affirmation 1 : Pour tous réels a et b, $\left(\mathrm{e}^{a+b}\right)^2 = \mathrm{e}^{2(a+b)} = \mathrm{e}^{2a+2b} = \mathrm{e}^{2a} \times \mathrm{e}^{2b}$. Donc l'affirmation est fausse.

Affirmation 2 : Une équation de la tangente t au point A d'abscisse 0 à la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2 + (3-x)\mathrm{e}^x$ est :
$M(x\,;\,y) \in t \iff y - f(0) = f'(0)(x-0)$.
Or $f(0) = -2 + 3\mathrm{e}^0 = -2 + 3 = 1$ et
$f'(x) = -\mathrm{e}^x + (3-x)\mathrm{e}^x = (2-x)\mathrm{e}^x$, d'où $f'(0) = 2\mathrm{e}^0 = 2$.
Donc $M(x\,;\,y) \in t \iff y - 1 = 2(x-0) \iff y = 2x+1$. L'affirmation est vraie.

Affirmation 3 : On a quel que soit le réel x : $\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x + \dfrac{3}{x} = \mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x - 1 + \dfrac{3}{x\mathrm{e}^x}\right)$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x\mathrm{e}^x} = 0$.
Par somme de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x - 1 + \dfrac{3}{x\mathrm{e}^x} = +\infty$ et par produit de limites :

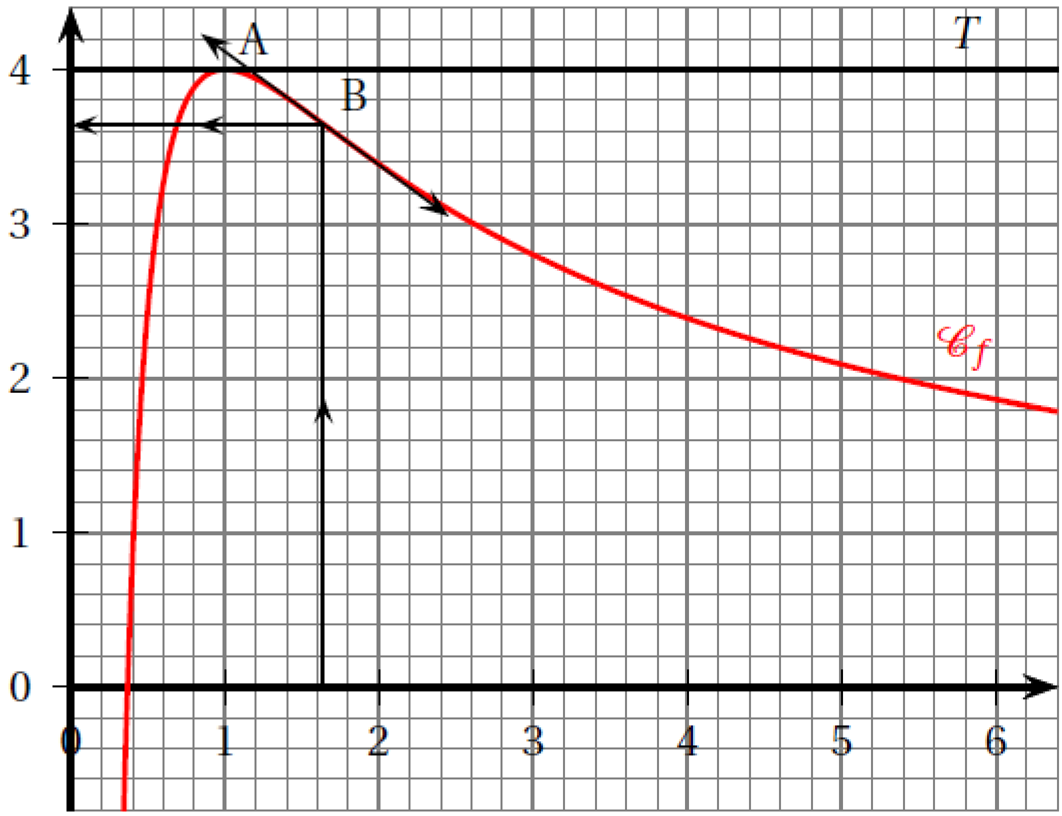
$\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^x - 1 + \dfrac{3}{x\mathrm{e}^x}\right) = +\infty$. L'affirmation est fausse.

Affirmation 4 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - x + \mathrm{e}^{-x}$
f somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable et sur cet intervalle :
$f'(x) = -1 - \mathrm{e}^{-x} = -\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) < 0$ car quel que soit le réel x, $\mathrm{e}^{-x} > 0$, donc $1 + \mathrm{e}^{-x} > 1$ puis $-\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) < -1 < 0$.
La fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
On a $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$, et $\lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ donc par somme de limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
De même $\lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$, d'où par somme de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe donc $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$.
Comme $f(0) = 1+1 = 2 > 0$ et $f(2) = 1-2+\mathrm{e}^{-2} \approx -0,86 < 0$, on a bien $0 < x_0 < 2$. L'affirmation est vraie.

Affirmation 5 : On a $g'(x) = 2x - 5 + \mathrm{e}^x$ et $g''(x) = 2 + \mathrm{e}^x > 0$ comme somme de deux termes supérieurs à zéro. la fonction g est donc convexe sur $\mathbb{R}$. L'affirmation est vraie.

CORRIGE

EXERCICE B **5 points**



1. A(1 ; 4) $\in \mathscr{C}_f$, donc $f(1) = 4$ et la courbe $\mathscr{C}_f$ admet une tangente horizontale T au point A(1 ; 4) ; le coefficient directeur de cette tangente en ce point est nul ou encore le nombre dérivé est nul : $f'(1) = 0$.

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres réels.}$$

2. f est une fonction quotient de fonctions dérivables sur $]0 ; +\infty[$, le dénominateur ne s'annulant pas et sur cet intervalle :
$$f'(x) = \frac{\frac{b}{x} \times x - 1(a + b\ln x)}{x^2} = \frac{b - a - b\ln x}{x^2}.$$

3. En utilisant les résultats du **1.** :
$$f(1) = \frac{a + b\ln 1}{1} = 4 \iff a = 4 ;$$
$$f'(1) = \frac{b - 4 - b\ln 1}{1^2} = 0 \iff b - 4 = 0 \iff b = 4.$$

Dans la suite de l'exercice, on admet que la fonction f est définie pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{4+4\ln x}{x}.$$

4. • On sait que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$;

   • On a $f(x) = \frac{4}{x} + \frac{4\ln x}{x}$.

   On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4}{x} = 0$ et on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4\ln x}{x} = 0$, donc par somme de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

5. On a donc sur $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x) = \frac{-4\ln x}{x^2}$ qui a pour signe celui de $-4\ln x$.

   On sait que sur $]0\,;\,1[$, $\ln x < 0$, donc $f'(x) > 0$ sur $]0;\,1[$;

   Par contre sur $]1\,;\,+\infty[$, $\ln x > 0$, donc $f'(x) < 0$ sur $]1\,;\,+\infty[$;

   $f'(1) = 0$, donc le point de coordonnées $(1;\,4)$ est le maximum de la fonction sur $]0\,;\,+\infty[$.

   La fonction f est donc croissante sur $]0;\,1[$ de $-\infty$ à 4, puis décroissante sur $[1\,;\,+\infty[$ de 4 à 0 avec un maximum 4 pour $x = 1$.

6. f'étant une fonction quotient de fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$, le dénominateur ne s'annulant pas est dérivable et sur cet intervalle :

   $$f''(x) = \frac{-4\times\frac{1}{x}\times x^2 - 2x\times(-4\ln x)}{x^4} = \frac{-4x+8x\ln x}{x^4} = \frac{-4+8\ln x}{x^3}.$$

7. La courbe présente un point d'inflexion lorsque la dérivée seconde s'annule. Or :

   $$f''(x) = 0 \iff \frac{-4+8\ln x}{x^3} = 0 \iff -4+8\ln x = 0 \iff -1+2\ln x = 0 \iff \ln x = \frac{1}{2}$$

   $$\iff x = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \approx 1,649 \ \left(\text{ou}\ \sqrt{\mathrm{e}}\right).$$

   L'ordonnée de ce point unique d'inflexion est $f\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{4+4\times\frac{1}{2}}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}} = \frac{6}{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}} = \frac{6}{\sqrt{\mathrm{e}}} \approx 3,639$.

   Ce point d'inflexion et la tangente en ce point sont indiqués sur la figure ci-dessus.