EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

En 2020, une influenceuse sur les réseaux sociaux compte 1 000 abonnés à son profil. On modélise le nombre d'abonnés ainsi : chaque année, elle perd 10 % de ses abonnés auxquels s'ajoutent 250 nouveaux abonnés.

Pour tout entier naturel n , on note u_n le nombre d'abonnés à son profil en l'année $(2020 + n)$, suivant cette modélisation. Ainsi $u_0 = 1\,000$.

1. Calculer u_1 .
2. Justifier que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9u_n + 250$.
3. La fonction Python nommée « suite » est définie ci-dessous. Dans le contexte de l'exercice, interpréter la valeur renvoyée par suite(10).

```
def suite( n ) :
    u = 1 000
    for i in range(n) :
        u = 0,9*u + 250
    return u
```

4.
 - a. Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n , $u_n \leq 2\,500$.
 - b. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
 - c. Dédurre des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.
5. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 2\,500$ pour tout entier naturel n .
 - a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et de terme initial $v_0 = -1\,500$.
 - b. Pour tout entier naturel n , exprimer v_n en fonction de n et montrer que :

$$u_n = -1\,500 \times 0,9^n + 2\,500.$$

- c. Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter dans le contexte de l'exercice.
6. Écrire un programme qui permet de déterminer en quelle année le nombre d'abonnés dépassera 2 200.
Déterminer cette année.

EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

1. On a donc $u_1 = 1000 \times \left(1 - \frac{10}{100}\right) + 250 = 1000 \times 0,9 + 250 = 900 + 250 = 1150$.

2. Enlever 10 % c'est multiplier par $1 - \frac{10}{100} = 1 - 0,10 = 0,90$.

Le nombre d'abonnés de l'année précédente est donc multiplié par 0,9; on ajoute ensuite chaque année 250 nouveaux abonnés, donc pour tout naturel n :

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 250.$$

3. $u(10)$ donne le nombre d'abonnés au bout de 10 ans; une calculatrice donne ≈ 1977 .

4. a. *Initialisation* : on a $u_0 = 1000 \leq 2500$: la relation est vraie au rang 0;

Hérédité : on suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait $u_n \leq 2500$.

La multiplication par $0,9 > 0$ respectant l'ordre, on a donc $0,9u_n \leq 0,9 \times 2500$ ou $0,9u_n \leq 2250$, puis en ajoutant 250 à chaque membre :

$0,9u_n + 250 \leq 2250 + 250$, soit $u_{n+1} \leq 2500$: la relation est encore vraie au rang $n+1$.

La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle est vraie au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence : quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2500$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = 0,9u_n + 250 - u_n = -0,1u_n + 250$.

Or d'après la question précédente : $u_n \leq 2500$, puis $0,1u_n \leq 0,1 \times 2500$ ou encore $0,1u_n \leq 250$, soit en prenant les opposés : $-250 \leq -0,1u_n$ et en ajoutant à chaque membre 250 : $0 \leq -0,1u_n + 250$.

On a donc pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ou $u_{n+1} \geq u_n$: la suite (u_n) est croissante.

c. La suite (u_n) est croissante (d'après 4. b.) et majorée par 2500 (d'après 4. a.) : elle converge donc vers une limite inférieure ou égale à 2500.

5. a. Pour $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 2500 = 0,9u_n + 250 - 2500$, soit

$$v_{n+1} = 0,9u_n - 2250 = 0,9(u_n - 2500) = 0,9v_n.$$

L'égalité vraie quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 0,9v_n$ montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et de terme initial $v_0 = u_0 - 2500 = 1000 - 2500 = -1500$.

b. On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 0,9^n = -1500 \times 0,9^n$.

$$\text{Or } v_n = u_n - 2500 \iff u_n = v_n + 2500 = 2500 - 1500 \times 0,9^n.$$

c. Comme $0 < 0,9 < 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$ et par suite par produit de limites

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} -1500 \times 0,9^n = 0 \text{ et finalement } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2500.$$

6. Écrire un programme qui permet de déterminer en quelle année le nombre d'abonnés dépassera 2200.

Déterminer cette année.

Le programme s'arrêtera la 16^e année.

```

n = 0
u = 1000
while u < 2200 :
    u = 0,9*u + 250
    n = n+1
return n

```