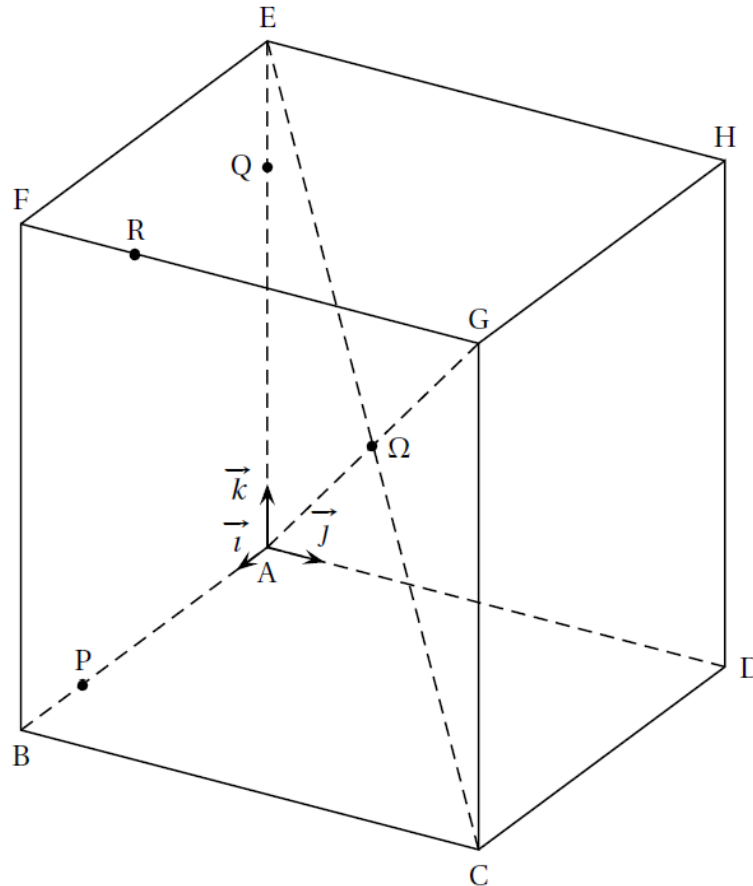


EXERCICE 2 commun à tous les candidats**5 points**

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 8 cm et de centre Ω .

Les points P, Q et R sont définis par $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{FR} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$.

On se place dans le repère orthonormé $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec : $\vec{i} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AE}$.

**Partie I**

1. Dans ce repère, on admet que les coordonnées du point R sont (8 ; 2 ; 8).
Donner les coordonnées des points P et Q.
2. Montrer que le vecteur $\vec{n}(1; -5; 1)$ est un vecteur normal au plan (PQR).
3. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (PQR) est $x - 5y + z - 6 = 0$.

Partie II

On note L le projeté orthogonal du point Ω sur le plan (PQR).

1. Justifier que les coordonnées du point Ω sont (4 ; 4 ; 4).
2. Donner une représentation paramétrique de la droite d perpendiculaire au plan (PQR) et passant par Ω .
3. Montrer que les coordonnées du point L sont $\left(\frac{14}{3}; \frac{2}{3}; \frac{14}{3}\right)$.
4. Calculer la distance du point Ω au plan (PQR).

Partie I

1. On a $P(6; 0; 0)$ et $Q(0; 0; 6)$.

2. On a $\overrightarrow{PQ} \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PR} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$.

+ $\vec{n} \cdot \overrightarrow{PQ} = -6 + 0 + 6 = 0$: les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont orthogonaux;

+ $\vec{n} \cdot \overrightarrow{PR} = 2 - 10 + 8 = 0$: les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{PR}$ sont orthogonaux.

Conclusion : le vecteur $\vec{n}$ orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan PQR est normal à ce plan.

3. D'après le résultat précédent :

$$M(x; y; z) \in (\text{PQR}) \iff 1x - 5y + 1z + d = 0, \text{ avec } d \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Or } P(6; 0; 0) \in (\text{PQR}) \iff 1 \times 6 - 5 \times 0 + 1 \times 0 + d = 0 \iff d = -6.$$

$$\text{Donc } M(x; y; z) \in (\text{PQR}) \iff x - 5y + z - 6 = 0.$$

Partie II

1. + Les plans (ABCD) et (EFGH) sont parallèles, donc les droites (AC) et (EG) sont parallèles;

+ Les droites (AE) et (CG) sont perpendiculaires au plan (ABCD), elles sont donc parallèles.

Le quadrilatère (AEGC) ayant ses côtés opposés parallèles est donc un parallélogramme; ses diagonales [AG] et [CE] ont donc le même milieu Ω .

Comme $G(8; 8; 8)$, les coordonnées de Ω sont donc $\left(\frac{0+8}{2}; \frac{0+8}{2}; \frac{0+8}{2}\right) = (4; 4; 4)$.

2. La droite (d) a donc pour vecteur directeur $\vec{n}$ et contient Ω , donc :

$$M(x; y; z) \in (d) \iff \overrightarrow{\Omega M} = t \vec{n}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}, \text{ soit :}$$

$$\begin{cases} x-4 = t \times 1 \\ y-4 = t \times (-5) \\ z-4 = t \times 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = 4+t \\ y = 4-5t \\ z = 4+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

3. L est le projeté orthogonal du point Ω sur le plan (PQR) donc la droite (ΩL) est perpendiculaire au plan (PQR), c'est donc la droite (d).

L est donc le point commun au plan (PQR) et à la droite (d), ses coordonnées vérifient donc le système :

$$\begin{cases} x = 4+t \\ y = 4-5t \\ z = 4+t \\ x-5y+z-6 = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Rightarrow 4+t-5(4-5t)+4+t-6=0 \iff 2+2t-20+25t=$$

$$0 \iff 27t = 18 \iff 9 \times 3t = 9 \times 2 \iff 3t = 2 \iff t = \frac{2}{3}.$$

En reportant cette valeur de t dans les trois premières équations du système, on trouve que $L\left(\frac{14}{3}; \frac{2}{3}; \frac{14}{3}\right)$.

4. Puisque A est l'origine du repère on a $AL^2 = \left(\frac{14}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{14}{3}\right)^2 = \frac{196+4+196}{9} = \frac{396}{9} = 44$.

On a donc $AL = \sqrt{44} = \sqrt{4 \times 11} = 2\sqrt{11}$.