Le candidat doit traiter UN SEUL des deux exercices A ou B

EXERCICE – B

Partie I

Considérons l'équation différentielle

$$y' = -0,4y + 0,4$$

où y désigne une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.

1. **a.** Déterminer une solution particulière constante de cette équation différentielle.
   b. En déduire l'ensemble des solutions de cette équation différentielle.
   c. Déterminer la fonction g, solution de cette équation différentielle, qui vérifie $g(0) = 10$.

Partie II

Soit p la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par

$$p(t) = \frac{1}{g(t)} = \frac{1}{1+9\mathrm{e}^{-0,4t}}.$$

1. Déterminer la limite de p en $+\infty$.
2. Montrer que $p'(t) = \dfrac{3,6\mathrm{e}^{-0,4t}}{\left(1+9\mathrm{e}^{-0,4t}\right)^2}$ pour tout $t \in [0\,;\,+\infty[$.
3. **a.** Montrer que l'équation $p(t) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution α sur $[0\,;\,+\infty[$.
   b. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près à l'aide d'une calculatrice.

Partie III

1. p désigne la fonction de la partie II.
   Vérifier que p est solution de l'équation différentielle $y' = 0,4y(1-y)$ avec la condition initiale $y(0) = \dfrac{1}{10}$ où y désigne une fonction définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. Dans un pays en voie de développement, en l'année 2020, 10 % des écoles ont accès à internet.
   Une politique volontariste d'équipement est mise en œuvre et on s'intéresse à l'évolution de la proportion des écoles ayant accès à internet.
   On note t le temps écoulé, exprimé en année, depuis l'année 2020.
   La proportion des écoles ayant accès à internet à l'instant t est modélisée par $p(t)$.
   Interpréter dans ce contexte la limite de la question II 1 puis la valeur approchée de α de la question II 3. b. ainsi que la valeur $p(0)$.

CORRIGE 2021 Asie 1 – Ex 4B

Partie I $y' = -0,4y + 0,4$

1. **a.** $y = K$, avec $K \in \mathbb{R}$ est solution de l'équation, si, avec $y' = 0$,
$0 = -0,4K + 0,4 \iff 0,4K = 0,4 \iff K = 1$

b. ✦ On sait que les solutions de l'équation différentielle $y' = -0,4y$ sont les fonctions définies par : $t \longmapsto y = Ce^{-0,4t}$, avec $C \in \mathbb{R}$;
✦ Les solutions de l'équation $y' = -0,4u + 0,4$ sont donc les fonctions :

$$t \longmapsto y = 1 + Ce^{-0,4t}, \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$

c. g définie par $g(t) = 1 + Ce^{-0,4t}$ vérifie :
$g(0) = 10 \iff 1 + Ce^{-0,4\times 0} = 10 \iff 1 + C = 10 \iff C = 9.$
On a donc $g(t) = 1 + 9e^{-0,4t}$

Partie II

1. On sait que $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-0,4t} = 0$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} p(t) = 1$.

2. g somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable et sur cet intervalle :
$g'(t) = -0,4 \times 9e^{-0,4t} = -3,6e^{-0,4t}$.
Or $p(t) = \dfrac{1}{g(t)} \Rightarrow p'(t) = -\dfrac{g'(t)}{(g(t))^2} = -\dfrac{-3,6e^{-0,4t}}{\left(1+9e^{-0,4t}\right)^2} = \dfrac{3,6e^{-0,4t}}{\left(1+9e^{-0,4t}\right)^2}$ pour tout $t \in [0\,;\,+\infty[$.

3. **a.** Le résultat précédent montre que, comme $3,6 >$, $e^{-0,4t} >$ quel que soit le réel y, $\left(1+9e^{-0,4t}\right)^2 > 0$, $p'(t) > 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$: la fonction p est strictement croissante sur cet intervalle.
Or $p(0) = \dfrac{1}{1+9} = \dfrac{1}{10} = 0,1$, et $\lim\limits_{t\to+\infty} p(t) = \dfrac{1}{1} = 1$.
Par application du théorème des valeurs intermédiaires comme $\dfrac{1}{2} \in [0\,;\,1]$, il existe un réel unique $\alpha \in [0\,;\,+\infty[$ tel que $p(\alpha) = \dfrac{1}{2}$.

b. La calculatrice donne :
$p(5) \approx 0,45$ et $p(6) \approx 0,55$, donc $5 < \alpha < 6$;
$p(5,4) \approx 0,491$ et $p(5,5) \approx 0,501$, donc $5,4 < \alpha < 5,5$;
$p(5,49) \approx 0,499$ et $p(5,50) \approx 0,501$, donc $5,49 < \alpha < 5,50$.
Conclusion $\alpha \approx 5,5$ à 10^{-1} près.

Partie III

1. ✦ $p'(t) = \dfrac{3,6e^{-0,4t}}{\left(1+9e^{-0,4t}\right)^2}$ d'après la question 2.

✦ $0,4p(t)(1-p(t)) = 0,4 \times \dfrac{1}{1+9e^{-0,4t}} \times \left(1 - \dfrac{1}{1+9e^{-0,4t}}\right)^2 = 0,4 \times \dfrac{9e^{-0,4t}}{1+9e^{-0,4t}} = \dfrac{3,6e^{-0,4t}}{\left(1+9e^{-0,4t}\right)^2}$,
donc p est solution de l'équation différentielle.
De plus on a vu que $p(0) = \dfrac{1}{10}$.

2.
- $\lim\limits_{t\to+\infty} p(t) = 1$ signifie qu'à long terme toutes les écoles auront accès à internet.
- $\alpha \approx 5,5$ signifie qu'au bout de 5 ans et demi la moitié des écoles aura accès à internet.
- $p(0) = 0,1$ signifie qu'en 2020, 10 % des écoles ont accès à internet.