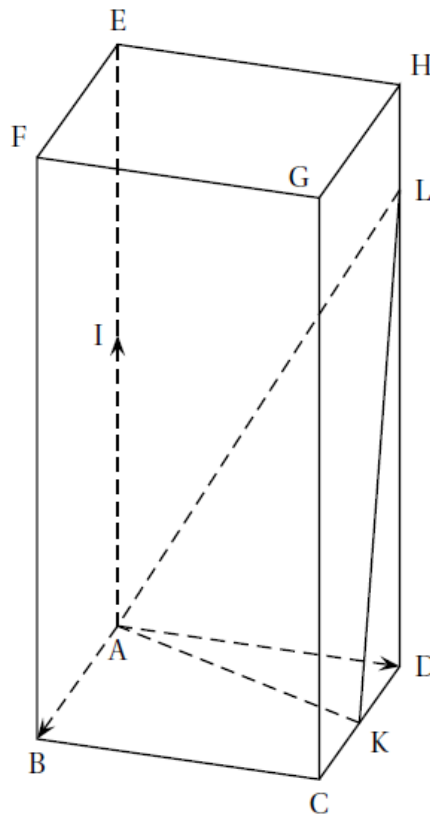


Commun à tous les candidats

On considère un pavé droit ABCDEFGH tel que $AB = AD = 1$ et $AE = 2$, représenté ci-dessous. Le point I est le milieu du segment [AE]. Le point K est le milieu du segment [DC]. Le point L est défini par : $\overrightarrow{DL} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI}$. N est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).



On se place dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AI})$.

On admet que le point L a pour coordonnées $(0; 1; \frac{3}{2})$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AL}$.
2.
 - a. Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(6; -3; 2)$ est un vecteur normal au plan (AKL).
 - b. En déduire une équation cartésienne du plan (AKL).
 - c. Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par D et perpendiculaire au plan (AKL).
 - d. En déduire que le point N de coordonnées $(\frac{18}{49}; \frac{40}{49}; \frac{6}{49})$ est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).

On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}.$$

3.
 - a. Calculer le volume du tétraèdre ADKL en utilisant le triangle ADK comme base.
 - b. Calculer la distance du point D au plan (AKL).
 - c. Déduire des questions précédentes l'aire du triangle AKL.

EXERCICE 2

5 points

Commun à tous les candidats

1. Avec $C(1; 1; 0)$ et $D(0; 1; 0)$, on obtient $K(\frac{1}{2}; 1; 0)$, donc $\overrightarrow{AK}(\frac{1}{2}; 1; 0)$ et on a $\overrightarrow{AL}(0; 1; \frac{3}{2})$.

2. a. $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AK} = 3 - 3 + 0 = 0$;

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AL} = 0 - 3 + 3 = 0$: le vecteur $\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan AKL, il est donc orthogonal à ce plan; c'est donc un vecteur normal à ce plan.

b. On a donc $M(x; y; z) \in (AKL) \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff 6x - 3y + 2z + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$ et comme A appartient à ce plan on a : $0 + 0 + 0 + d = 0$.

Conclusion : $M(x; y; z) \in (AKL) \iff 6x - 3y + 2z = 0$.

c. La droite Δ contient D et a pour vecteur directeur $\vec{n}$, donc :

$$M(x; y; z) \in \Delta \iff \text{il existe } t \in \mathbb{R}, \overrightarrow{DM} = t \vec{n} \iff \begin{cases} x = 6t \\ y - 1 = -3t \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \iff$$

$$\begin{cases} x = 6t \\ y = 1 - 3t \\ z = 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

d. Le point N est donc le point commun au plan (AKL) et à la droite Δ , donc ses coordonnées $(x; y; z)$ vérifient le système :

$$\begin{cases} x = 6t \\ y = 1 - 3t \\ z = 2t \\ 6x - 3y + 2z = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Rightarrow 6 \times 6t + (-3) \times (1 - 3t) + 2 \times 2t = 0 \iff$$

$36t - 3 + 9t + 4t = 0 \iff 49t = 3 \iff t = \frac{3}{49}$; en remplaçant dans les trois premières équations du système, on obtient :

$$\begin{cases} x = 6 \times \frac{3}{49} \\ y = 1 - 3 \times \frac{3}{49} \\ z = 2 \times \frac{3}{49} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{18}{49} \\ y = \frac{40}{49} \\ z = \frac{6}{49} \end{cases}. \text{ Conclusion : } N\left(\frac{18}{49}; \frac{40}{49}; \frac{6}{49}\right).$$

3. a. Le triangle ADK est rectangle en D; on a par définition $AD = 1$ et $DK = \frac{1}{2}$.

$$\text{Donc } \mathcal{A}(\text{ADK}) = \frac{AD \times DK}{2} = \frac{1}{4}.$$

D'autre part $DL = \frac{3}{2}$, donc

$$\mathcal{V}(\text{ADKL}) = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{8}.$$

b. On a $\overrightarrow{DN}\left(\frac{18}{49}; \frac{40}{49} - 1; \frac{6}{49}\right)$, soit $\overrightarrow{DN}\left(\frac{18}{49}; \frac{-9}{49}; \frac{6}{49}\right)$, donc :

$$DN^2 = \left(\frac{18}{49}\right)^2 + \left(\frac{-9}{49}\right)^2 + \left(\frac{6}{49}\right)^2 = \frac{18^2 + 9^2 + 6^2}{49^2} = \frac{324 + 81 + 36}{49^2} = \frac{441}{49^2} = \frac{21^2}{49^2} = \left(\frac{21}{49}\right)^2.$$

$$\text{Donc } DN = \frac{21}{49} = \frac{3}{7}.$$

c. En prenant comme base le triangle AKL, on a :

$$\mathcal{V}(\text{ADKL}) = \frac{\mathcal{A}(\text{AKL}) \times DN}{3}, \text{ soit } \frac{1}{8} = \frac{\mathcal{A}(\text{AKL}) \times \frac{3}{7}}{3}, \text{ d'où}$$

$$\mathcal{A}(\text{AKL}) = 7 \times \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \text{ (u. a.)}.$$