EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Une société de jeu en ligne propose une nouvelle application pour smartphone nommée « Tickets coeurs! ».

Chaque participant génère sur son smartphone un ticket comportant une grille de taille 3×3 sur laquelle sont placés trois cœurs répartis au hasard, comme par exemple ci-dessous.

	♡	
♡		
		♡

Le ticket est gagnant si les trois cœurs sont positionnés côte à côte sur une même ligne, sur une même colonne ou sur une même diagonale.

1. Justifier qu'il y a exactement 84 façons différentes de positionner les trois cœurs sur une grille.
2. Montrer que la probabilité qu'un ticket soit gagnant est égale à $\dfrac{2}{21}$.
3. Lorsqu'un joueur génère un ticket, la société prélève 1 € sur son compte en banque. Si le ticket est gagnant, la société verse alors au joueur 5 €. Le jeu est-il favorable au joueur?
4. Un joueur décide de générer 20 tickets sur cette application. On suppose que les générations des tickets sont indépendantes entre elles.
   a. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui compte le nombre de tickets gagnants parmi les 20 tickets générés.
   b. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, de l'évènement $(X = 5)$.
   c. Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, de l'évènement $(X \geqslant 1)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

CORRIGE

Exercice 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

1. Il y a $C_9^3 = \dfrac{9!}{3! \times (9-3)!} = \dfrac{9\times8\times7}{3\times2} 3\times4\times7 = 84$ façons différentes de choisir 3 cases différentes parmi 9.
2. Il y a 3 lignes, 3 colonnes et 2 diagonales donc 8 combinaisons gagnantes.
   La probabilité qu'un ticket soit gagnant est égale à $\dfrac{8}{84} = \dfrac{4\times2}{4\times21} = \dfrac{2}{21}$.
3. Soit X la variable aléatoire égale au montant algébrique de la somme gagnée.
   On a $P(X=4) = \dfrac{2}{21}$ et $P(X=-1) = \dfrac{19}{21}$.
   On a donc $E(X) = 4\times\dfrac{2}{21} + (-1)\times\dfrac{19}{21} = \dfrac{8-19}{21} = -\dfrac{11}{21} \approx -0,524$.
   En moyenne sur un grand nombre de parties un joueur perd 58 centimes d'euro par partie. Le jeu est défavorable au joueur.
4. **a.** La variable aléatoire X qui compte le nombre de tickets gagnants parmi les 20 tickets générés suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \dfrac{2}{21}$.

   b. On a $p(X=5) = \binom{20}{5} \times \left(\dfrac{2}{21}\right)^5 \times \left(\dfrac{19}{21}\right)^{20-5} \approx 0,0271$, soit 0,027 à 10^{-3} près.

   c. On a $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X=0) = 1 - \left(\dfrac{2}{21}\right)^0 \times \left(\dfrac{19}{21}\right)^{20} \approx (1 - 0,1351) \approx 0,8649$ soit 0,865 à 10^{-3} près.