EXERCICE – A

Dans cet exercice, on s'intéresse à la croissance du bambou Moso de taille maximale 20 mètres.
Le modèle de croissance de Ludwig von Bertalanffy suppose que la vitesse de croissance pour un tel bambou est proportionnelle à l'écart entre sa taille et la taille maximale.

Partie I : modèle discret

Dans cette partie, on observe un bambou de taille initiale 1 mètre.
Pour tout entier naturel n, on note u_n la taille, en mètre, du bambou n jours après le début de l'observation. On a ainsi $u_0 = 1$.
Le modèle de von Bertalanffy pour la croissance du bambou entre deux jours consécutifs se traduit par l'égalité :

$$u_{n+1} = u_n + 0,05\,(20 - u_n) \text{ pour tout entier naturel } n.$$

1. Vérifier que $u_1 = 1,95$.

2. **a.** Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,95u_n + 1$.

b. On pose pour tout entier naturel n, $v_n = 20 - u_n$.
Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le terme initial v_0 et la raison.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 20 - 19 \times 0,95^n$.

3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie II : modèle continu

Dans cette partie, on souhaite modéliser la taille du même bambou Moso par une fonction donnant sa taille, en mètre, en fonction du temps t exprimé en jour.
D'après le modèle de von Bertalanffy, cette fonction est solution de l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' = 0,05(20 - y)$$

où y désigne une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et y' désigne sa fonction dérivée.
Soit la fonction L définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $L(t) = 20 - 19\mathrm{e}^{-0,05t}$.

1. Vérifier que la fonction L est une solution de (E) et qu'on a également $L(0) = 1$.

2. On prend cette fonction L comme modèle et on admet que, si on note L' sa fonction dérivée, $L'(t)$ représente la vitesse de croissance du bambou à l'instant t.

a. Comparer $L'(0)$ et $L'(5)$.

b. Calculer la limite de la fonction dérivée L' en $+\infty$.
Ce résultat est-il en cohérence avec la description du modèle de croissance exposé au début de l'exercice?

CORRIGE

EXERCICE – A

Partie I : modèle discret

1. On a pour $n=0$, $u_1 = u_0 + 0,05(20-u_0) = 1 + 0,05 \times 19 = 1 + 0,95 = 1,95$.
2. **a.** Pour tout naturel n, $u_{n+1} = u_n + 0,05\left(20 - u_n\right) = u_n + 1 - 0,05u_n = u_n(1-0,05)+1 = 0,95u_n + 1$.

   b. Pour tout naturel n, $v_{n+1} = 20 - u_{n+1} = 20 - \left(0,95u_n + 1\right) = 20 - 0,95u_n - 1 = 19 - 0,95u_n = 0,95 \times 20 - 0,95u_n = 0,95\left(20 - u_n\right) = 0,95v_n$.
   Conclusion : pour tout naturel n, $v_{n+1} = 0,95v_n$: cette égalité montre que la suite $\left(v_n\right)$ est une suite géométrique de terme initial $v_0 = 20 - u_0 = 20 - 1 = 19$ et de raison 0,95.

   c. On sait que pour tout $n \in n\mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times q^n$, q étant la raison, soit $v_n = 19 \times 0,95^n$.
   Or $v_n = 20 - u_n \iff u_n = 20 - v_n = 20 - 19 \times 0,95^n$.
3. On vient de démontrer que pour tout naturel n, $u_n = 20 - 19 \times 0,95^n$.
   Comme $0 < 0,95 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,95^n = 0$, d'où par somme de limites :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 20.$$

Partie II : modèle continu $\quad (E) \quad y' = 0,05(20-y)$

1. L est la somme de fonctions dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :
   $L'(t) = -0,05 \times \left(-19\mathrm{e}^{-0,05t}\right) = 0,95\mathrm{e}^{-0,05t}$.
   Donc L est solution de (E) si :
   $y' = 0,05(20-y) \iff 0,95\mathrm{e}^{-0,05t} = 0,05\left(20 - \left(\left(20 - 19\mathrm{e}^{-0,05t}\right)\right)\right)$
   $\iff 0,95\mathrm{e}^{-0,05t} = 0,05\left(19\mathrm{e}^{-0,05t}\right) \iff 0,95\mathrm{e}^{-0,05t} = 0,95\mathrm{e}^{-0,05t}$ qui est vraie.
   De plus $L(0) = 20 - 19\mathrm{e}^{-0,05\times 0} = 20 - 19 \times 1 = 1$.

2. **a.** ✦ $L'(0) = 0,95\mathrm{e}^{-0,05\times 0} = 0,95 \times 1 = 0,95$.
   ✦ $L'(5) = 0,95\mathrm{e}^{-0,05\times 5} = 0,95 \times \mathrm{e}^{-0,25} \approx 0,74$.
   Donc $L'(0) > L'(5)$.

   b. On sait que $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,05t} = 0$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} L'(t) = 0$.
   Ce résultat est bien en cohérence avec la description du modèle de croissance du bambou : celui-ci a une taille croissante ($L'(t) > 0$) de 1 m (taille initiale) à 20 m (taille finale), la dérivée donc la vitesse de croissance se rapprochant de zéro.