## EXERCICE 3 — 5 points

**Commun à tous les candidats**

En mai 2020, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable.
Elle propose alors à ses 5 000 collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.
En mai 2020, seuls 200 d'entre eux ont choisi le télétravail.
Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de l'entreprise constatent que 85% de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent choisissent de continuer, et que, chaque mois, 450 collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail.
On modélise le nombre de collaborateurs de cette entreprise en télétravail par la suite $(a_n)$.
Le terme $a_n$ désigne ainsi une estimation du nombre de collaborateurs en télétravail le $n$-ième mois après le mois de mai 2020. Ainsi $a_0 = 200$.

**Partie A :**

**1.** Calculer $a_1$.
**2.** Justifier que pour tout entier naturel $n$, $a_{n+1} = 0,85\, a_n + 450$.
**3.** On considère la suite $(v_n)$ définie pour tout entier naturel $n$ par : $v_n = a_n - 3000$.
  **a.** Démontrer que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison 0,85.
  **b.** Exprimer $v_n$ en fonction de $n$ pour tout entier naturel $n$.
  **c.** En déduire que, pour tout entier naturel $n$, $a_n = -\,2800 \times 0,85^{\,n} + 3000$.
**4.** Déterminer le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2 500, après la mise en place de cette mesure dans l'entreprise.

**Partie B :**

Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur son personnel, les dirigeants de l'entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = \dfrac{5u_n + 4}{u_n + 2}$
où $u_n$ désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de $n$ mois après le mois de mai 2020.

**1.** Démontrer que la fonction $f$ définie pour tout $x \in [\,0\,;+\infty\,[$ par $f(x) = \dfrac{5x+4}{x+2}$ est strictement croissante sur $[\,0\,;+\infty\,[$.

**2. a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 4$.
  **b.** Justifier que la suite $(u_n)$ est convergente.

**3.** On admet que pour tout entier naturel $n$, $0 \leq 4 - u_n \leq 3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
  En déduire la limite de la suite $(u_n)$ et l'interpréter dans le contexte de la modélisation.

**EXERCICE 3** **5 points**

**Commun à tous les candidats**

**Partie A :**

1. $a_1 = a_0 \times \dfrac{85}{100} + 450 = 200 \times \dfrac{85}{100} + 450 = 620$
2. Prendre les 85 % du nombre de collaborateurs en télétravail revient à multiplier par 0,85; puis on ajoute 450 donc, pour tout entier naturel $n$, on a : $a_{n+1} = 0,85a_n + 450$.
3. On considère la suite $(v_n)$ définie pour tout entier naturel n par : $v_n = a_n - 3000$; on en déduit que $a_n = v_n + 3\,000$.

   **a.**
   - $v_{n+1} = u_{n+1} - 3000 = 0,85u_n + 450 - 3000 = 0,85(v_n + 3000) - 2550$
     $= 0,85v_n + 2550 - 2550 = 0,85v_n$
   - $v_0 = u_0 - 3000 = 200 - 3\,000 = -2\,800$

   Donc la suite $(v_n)$ est géométrique de raison $q = 0,85$ et de premier terme $v_0 = -2\,800$.

   **b.** On en déduit que, pour tout $n$, on a $v_n = v_0 \times q^n = -2\,800 \times 0,85^n$.

   **c.** Or $u_n = v_n + 3\,000$ donc, pour tout entier naturel $n$, $a_n = -2\,800 \times 0,85^n + 3\,000$.

4. Le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2 500, après la mise en place de cette mesure dans l'entreprise est le nombre entier $n$ tel que $a_n > 2\,500$; on résout cette inéquation :

$$a_n > 2\,500 \iff -2\,800 \times 0,85^n + 3\,000 > 2\,500 \iff 500 > 2\,800 \times 0,85^n$$
$$\iff \frac{500}{2\,800} > 0,85^n \iff \ln\left(\frac{500}{2\,800}\right) > \ln(0;85^n)$$
$$\iff \ln\left(\frac{5}{28}\right) > n \times \ln(0;85) \iff \frac{\ln\left(\frac{5}{28}\right)}{\ln(0,85)} < n$$

Or $\dfrac{\ln\left(\frac{5}{28}\right)}{\ln(0,85)} \approx 10,6$, donc le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2 500 est 11.

**Partie B :**

1. Soit $f$ la fonction définie pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5x+4}{x+2}$.

   $f$ est une fonction rationnelle définie sur $[0\,,\,+\infty[$ donc elle est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.

   $$f'(x) = \frac{5 \times (x+2) - (5x+4) \times 1}{(x+2)^2} = \frac{5x + 10 - 5x - 4) \times 1}{(x+2)^2} = \frac{6}{(x+2)^2}$$

   $f'(x) > 0$ sur $[0\,,\,+\infty[$, donc la fonction $f$ est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

**2.** **a.** Soit $\mathscr{P}$ la propriété $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

- **Initialisation**

  $u_0 = 1$ et $u_1 = \dfrac{5 \times u_0 + 4}{u_0 + 1} = \dfrac{5 \times 1 + 4}{1 + 2} = \dfrac{9}{3} = 3$

  $0 \leqslant 1 \leqslant 3 \leqslant 4$, soit $0 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 4$, donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

- **Hérédité**

  On suppose la propriété vraie au rang $n \geqslant 0$, c'est-à-dire $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

  La fonction $f$ est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$ donc sur $[0\,;\,4[$, donc de la relation $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$, on déduit $f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(4)$.

  $f(0) = \dfrac{4}{2} = 2 \geqslant 0$ ; $f(u_n) = u_{n+1}$ ; $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ et $f(4) = \dfrac{24}{6} = 4$

  On a donc : $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4$, donc la propriété est vraie au rang $n+1$.

- **Conclusion**

  La propriété est vraie au rang 0, et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$, donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

On a donc démontré que pour tout $n$, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$.

**b.**
- Pour tout $n$, on a ; $u_n \leqslant u_{n+1}$ donc la suite $(u_n)$ est croissante.
- Pour tout $n$, on a ; $u_n \leqslant 4$ donc la suite $(u_n)$ est majorée.

La suite $(u_n)$ est croissante et majorée donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite $(u_n)$ est convergente.

**3.** On admet que pour tout entier naturel $n$, $0 \leqslant 4 - u_n \leqslant 3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

La suite $\left(3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$ est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ ; or $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$ donc la suite $\left(3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$ converge vers 0.

D'après le théorème des gendarmes, on déduit $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (4 - u_n) = 0$ et donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (u_n) = 4$.

Cela signifie que le nombre de collaborateurs satisfaits va tendre vers 4 milliers sur les 5 000 que compte l'entreprise.