EXERCICE 4 A — 5 points

Commun à tous les candidats

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B

Géométrie dans l'espace

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points suivants :

$$A(2\ ;\ -1\ ;\ 0), B(3\ ;\ -1\ ;\ 2), C(0\ ;\ 4\ ;\ 1) \text{ et } S(0\ ;\ 1\ ;\ 4).$$

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.

2. **a.** Montrer que le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC).

b. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

c. Montrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

3. Soit (d) la droite orthogonale au plan (ABC) passant par S. Elle coupe le plan (ABC) en H.

a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d).

b. Montrer que les coordonnées du point H sont $H(2 ; 2 ; 3)$.

4. On rappelle que le volume V d'un tetraèdre est $V = \dfrac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.

Calculer le volume du tétraèdre SABC.

5. **a.** Calculer la longueur SA.

b. On indique que $SB = \sqrt{17}$.

En déduire une mesure de l'angle $\widehat{ASB}$ approchée au dixième de degré.

EXERCICE 4A **5 points**

Commun à tous les candidats

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points suivants :

A(2 ; −1 ; 0), B(3 ; −1 ; 2), C(0 ; 4 ; 1) et S(0 ; 1 ; 4).

1. $\overrightarrow{AB} : \begin{pmatrix} 3-2 \\ -1-(-1) \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} : \begin{pmatrix} 0-2 \\ 4-(-1) \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times (-2) + 0 \times 5 + 1 \times 2 = 0$ donc $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$.

Le triangle ABC est donc rectangle en A.

2. **a.** Soit le vecteur $\overrightarrow{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc ce sont deux vecteurs directeurs du plan (ABC).

- $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times 1 + 1 \times 0 + (-1) \times 2 = 0$ donc $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{AB}$;
- $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times (-2) + 1 \times 5 + (-1) \times 1 = -4 + 5 - 1 = 0$ donc $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{AC}$.

Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, donc il est orthogonal au plan (ABC).

b. Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC) donc le plan (ABC) a une équation cartésienne de la forme : $2x + 1y + (-1)z + d = 0$ soit $2x + y - z = d = 0$ où $d \in \mathbb{R}$.

$A \in (ABC)$ donc $2x_A + y_A - z_A + d = 0$, c'est-à-dire $4 - 1 + 0 + d = 0$, donc $d = -3$.

Le plan (ABC) a pour équation : $2x + y - z - 3 = 0$.

c. $2x_S + y_S - z_S - 3 = 0 + 1 - 4 - 3 = -6 \neq 0$ donc $S \notin (ABC)$ donc les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

3. Soit (d) la droite orthogonale au plan (ABC) passant par S. Elle coupe le plan (ABC) en H.

a. La droite (d) est orthogonale au plan (ABC) donc elle a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{n}$. De plus elle contient le point S (0 ; 1 ; 4).

Donc elle a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 0 + 2 \times t \\ y = 1 + 1 \times t \\ z = 4 + (-1) \times t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = 4 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

b. Le point H est l'intersection de la droite (d) et du plan (ABC), donc ses coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} x & = & 2t \\ y & = & 1+t \\ z & = & 4-t \\ 2x+y-z-3 & = & 0 \end{cases}$$

Donc : $2(2t)+(1+t)-(4-t)-3=0$, c'est-à-dire $4t+1+t-4+t-3=0$ soit $t=1$.

Pour $t=1$, on aura $x=2\times 1=2$, $y=1+1=2$ et $z=4-1=3$.

Les coordonnées du point H sont donc $(2\,;\,2\,;\,3)$.

4. On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre est $\mathcal{V}=\dfrac{\text{aire de la base}\times\text{hauteur}}{3}$.

- La base est le triangle ABC rectangle en A dont l'aire vaut $\mathcal{A}=\dfrac{\text{AB}\times\text{AC}}{2}$.
  $\text{AB}^2=1^2+0^2+2^2=5$ donc $\text{AB}=\sqrt{5}$
  $\text{AC}^2=(-2)^2+5^2+1^2=30$ donc $\text{AC}=\sqrt{30}$
  $\mathcal{A}=\dfrac{\sqrt{5}\times\sqrt{30}}{2}=\dfrac{\sqrt{150}}{2}=\dfrac{5\sqrt{6}}{2}$
- La hauteur est SH.
  $\text{SH}^2=(2-0)^2+(2-1)^2+3-4)^2=6$ donc $\text{SH}=\sqrt{6}$
- $\mathcal{V}=\dfrac{1}{3}\times\mathcal{A}\times\text{SH}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{5\sqrt{6}}{2}\times\sqrt{6}=5$

5. **a.** $\overrightarrow{\text{SA}}:\begin{pmatrix}2-0\\-1-1\\0-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\\4\end{pmatrix}$ donc $\text{SA}^2=2^2+(-2)^2+(-4)^2=24$ donc $\text{SA}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$

b. On indique que $\text{SB}=\sqrt{17}$.

$\overrightarrow{\text{SB}}:\begin{pmatrix}3-0\\1-(-1)\\4-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{\text{SA}}\cdot\overrightarrow{\text{SB}}=2\times2+(-2)\times(-2)+(-4)\times(-2)=18$

Or $\overrightarrow{\text{SA}}\cdot\overrightarrow{\text{SB}}=\text{SA}\times\text{SB}\times\cos\left(\widehat{\text{ASB}}\right)$

Donc $18=2\sqrt{6}\times\sqrt{17}\times\cos\left(\widehat{\text{ASB}}\right)$ et donc $\cos\left(\widehat{\text{ASB}}\right)=\dfrac{18}{2\sqrt{6}\times\sqrt{17}}=\dfrac{9}{\sqrt{102}}$

On en déduit que $\widehat{\text{ASB}}\approx 27{,}0°$.