EXERCICE 4 B — 5 points

Commun à tous les candidats

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B

Équations différentielles

Partie A :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}x} + \frac{2}{3}x - 2$.

1. On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note g' sa fonction dérivée.
   Montrer que, pour tout réel x : $g'(x) = \frac{-2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + \frac{2}{3}$.
2. En déduire le sens de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer le signe de $g(x)$, pour tout x réel.

Partie B :

1. On considère l'équation différentielle (E) : $3y' + y = 0$.
   Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution particulière dont la courbe représentative, dans un repère du plan, passe par le point $\mathrm{M}(0\,;2)$.
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
   a. Montrer que la tangente (Δ_0) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point $\mathrm{M}(0\,;2)$ admet une équation de la forme : $y = -\frac{2}{3}x + 2$.
   b. Étudier, sur $\mathbb{R}$, la position de cette courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la tangente (Δ_0).

Partie C :

1. Soit A le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a, a réel quelconque.
   Montrer que la tangente (Δ_a) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A coupe l'axe des abscisses en un point P d'abscisse $a + 3$.
2. Expliquer la construction de la tangente (Δ_{-2}) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse -2.

EXERCICE 4B **5 points**

Commun à tous les candidats

1. On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note g' sa fonction dérivée.

$$g'(x) = 2\times\left(-\frac{1}{3}\right)e^{\frac{-1}{3}x} + \frac{2}{3} = \frac{-2}{3}e^{-\frac{1}{3}x} + \frac{2}{3}$$

2. $g'(x) = \frac{2}{3}\left(1 - e^{\frac{-1}{3}x}\right)$

$$g'(x) > 0 \iff 1 - e^{\frac{-1}{3}x} > 0 \iff 1 > e^{\frac{-1}{3}x} \iff \ln(1) > \frac{-1}{3}x \iff 0 > \frac{-1}{3}x \iff x > 0$$

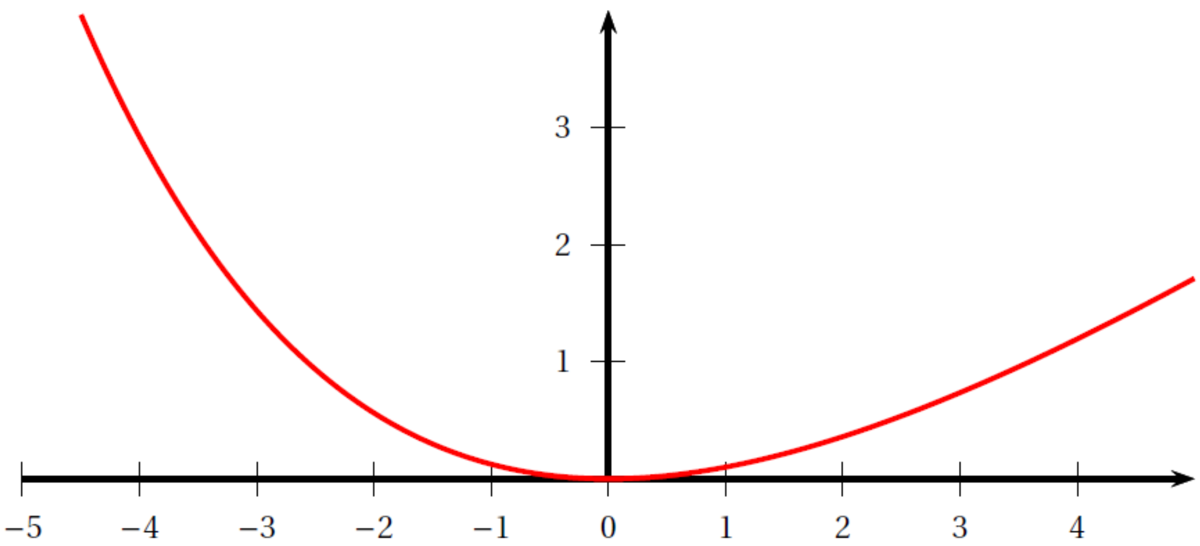
$g(0) = 2e^0 - 0 - 2 = 0$

On en déduit les variations de la fonction g :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

3. D'après le tableau de variations de g, on a : $g(x) \geqslant 0$ pour tout réel x.

Un tracé de la courbe représentative sur la calculatrice le confirme.



Partie B

1. On considère l'équation différentielle (E) : $3y' + y = 0$.

   $(E) \iff y' + \dfrac{1}{3}y = 0$ qui a pour solutions d'après le cours, les fonctions h définies par $h(x) = C \times \mathrm{e}^{\frac{-1}{3}x}$, où $C \in \mathbb{R}$.

2. La solution particulière dont la courbe représentative, dans un repère du plan, passe par le point M(0; 2) vérifie $h(0) = 2$, c'est-à-dire $C\mathrm{e}^0 = 2$, donc $C = 2$.

   La solution particulière cherchée est la fonction h définie par $h(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}x}$.

3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

   a. La tangente (Δ_0) à la courbe $\mathscr{C}_f$ en M(0; 2) a pour équation :

   $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

   $f(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}x}$ donc $f(0) = 2$

   $f'(x) = 2 \times \left(-\dfrac{1}{3}\right)\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}x} = -\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}x}$ donc $f'(0) = -\dfrac{2}{3}$

   (Δ_0) a donc pour équation $y = -\dfrac{2}{3}x + 2$.

   b. Pour étudier, sur $\mathbb{R}$, la position de cette courbe $\mathscr{C}_f$ par rapport à la tangente (Δ_0), on étudie le signe de $f(x) - \left(-\dfrac{2}{3}x + 2\right)$.

   $f(x) - \left(-\dfrac{2}{3}x + 2\right) = 2\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}x} + \dfrac{2}{3}x - 2 = g(x)$; on sait d'après la partie A, que $g(x) \leqslant 0$ sur $\mathbb{R}$, donc la courbe $\mathscr{C}_f$ est toujours en dessous de la tangente Δ_0.

Partie C

1. Soit A le point de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a, a réel quelconque.

   La tangente (Δ_a) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A a pour équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ c'est-à-dire $y = -\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}x}(x-a) + 2\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}a}$.

   Elle coupe l'axe des abscisses en un point P dont l'abscisse est solution de l'équation

   $-\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}a}(x-a) + 2\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}a} = 0$. On résout cette équation :

   $-\dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}a}(x-a) + 2\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}a} = 0 \iff 2\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}a} = \dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}a}(x-a) \iff \dfrac{2\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}a}}{\frac{2}{3}\mathrm{e}^{\frac{-1}{3}a}} = x - a$

   $$\iff 3 = x - a \iff x = a + 3$$

   Donc (Δ_a) coupe l'axe des abscisses en un point P de coordonnées $(a+3\,;\,0)$.

2. La tangente (Δ_{-2}) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse -2 coupe l'axe des abscisses au point P de coordonnées $(-2+3\,;\,0)$ soit $(1\,;\,0)$.

   La tangente (Δ_{-2}) est donc la droite (BP).