EXERCICE 2 — 5 points

Commun à tous les candidats

Au 1er janvier 2020, la centrale solaire de Big Sun possédait 10 560 panneaux solaires.
On observe, chaque année, que 2 % des panneaux se sont détériorés et nécessitent d'être retirés tandis que 250 nouveaux panneaux solaires sont installés.

Partie A - Modélisation à l'aide d'une suite

On modélise l'évolution du nombre de panneaux solaires par la suite (u_n) définie par $u_0 = 10560$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,98u_n + 250$, où u_n est le nombre de panneaux solaires au 1er janvier de l'année $2020 + n$.

1. **a.** Expliquer en quoi cette modélisation correspond à la situation étudiée.

   b. On souhaite savoir au bout de combien d'années le nombre de panneaux solaires sera strictement supérieur à 12 000.

   À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.

   c. Recopier et compléter le programme en Python ci-dessous de sorte que la valeur cherchée à la question précédente soit stockée dans la variable n à l'issue de l'exécution de ce dernier.

```
u = 10560
n= 0
while ...... :
    u = ......
    n = ......
```

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant 12500$.
3. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
4. En déduire que la suite (u_n) converge.
   Il n'est pas demandé, ici, de calculer sa limite.
5. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 12500$, pour tout entier naturel n.

   a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,98$ dont on précisera le premier terme.

   b. Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

   c. En déduire, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.

   d. Déterminer la limite de la suite (u_n).

   Interpréter ce résultat dans le contexte du modèle.

Partie B - Modélisation à l'aide d'une fonction

Une modélisation plus précise a permis d'estimer le nombre de panneaux solaires de la centrale à l'aide de la fonction f définie pour tout $x \in [0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 12\,500 - 500\mathrm{e}^{-0,02x+1,4},$$

où x représente le nombre d'années écoulées depuis le 1er janvier 2020.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. En utilisant ce modèle, déterminer au bout de combien d'années le nombre de panneaux solaires dépassera 12 000.

CORRIGE

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A - Modélisation à l'aide d'une suite

1. **a.** Retrancher 2 % c'est multiplier par $1 - \dfrac{2}{100} = 1 - 0,02 = 0,98$.

   D'une année sur l'autre on multiplie nombre de panneaux par 0,98 puis on augmente le nombre de panneaux de 250.

   b. Avec la calculatrice il suffit de taper 10 560 Entrée puis $\times 0,98 + 50$.

   Entrée donne $u_1 \approx 10599$, les appuis successifs de Entrée donnent u_2, u_3, etc.

   On obtient $u_{68} \approx 12009$.

   le nombre de panneaux dépassera 12 000 au bout de 68 ans soit en 2088.

   c. Recopier et compléter le programme en Python ci-dessous de sorte que la valeur cherchée à la question précédente soit stockée dans la variable n à l'issue de l'exécution de ce dernier.

```
u = 10 560
n= 0
while u ⩽ 12 000 :
    u = 0,98 ∗ u + 250
    n = n + 1
```

2. *Initialisation* : $u_0 = 10560 \leqslant 12500$: la proposition est vraie au rang 0.

   Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \leqslant 12500$ soit en multipliant par 0,98 :

   $0,98u_n \leqslant 0,98 \times 12500$ et en ajoutant 250 à chaque membre :

   $0,98u_n + 250 \leqslant 0,98 \times 12500 + 250$ ou $u_{n+1} \leqslant 12250 + 250$

   et finalement $u_{n+1} \leqslant 12500$: la proposition est vraie au r ng $n+1$.

   La proposition est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ elle est vraie au rang $n+1$: d'après le principe de la récurrence la proposition $u_n \leqslant 12500$ est vraie pur tout naturel $n \in \mathbb{N}$.

3. On a pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 0,98u_n + 250 - u_n = 250 - 0,02u_n$.

   Or d'après le résultat précédent :

   $u_n \leqslant 12500 \Rightarrow 0,02u_n \leqslant 0,02 \times 12500$ ou encore $0,02u_n \leqslant 250$ ou en ajoutant à chaque membre $-0,02u_n$:

   $0 \leqslant 250 - 0,02u_n$; on a donc démontré que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$, ce qui signifie que la suite (u_n) est croissante.

4. La suite (u_n) est croissante et majorée par 12 500 : elle est donc convergente vers une limite ℓ, telle que $\ell \leqslant 2500$.

5. **a.** Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 12500 = 0,98u_n + 250 - 12500$, soit

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 0,98u_n - 12250 = 0,98u_n - 12250 \times \frac{0,98}{0,98} = 0,98u_n - 12500 \times 0,98 \\ &= 0,98(u_n - 12500) \text{ soit enfin } v_{n+1} = 0,98v_n : \end{aligned}$$

(v_n) est une suite géométrique de raison 0,98
de premier terme $v_0 = u_0 - 12500 = 10560 - 12500 = -1940$.

b. On sait qu'alors quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 0,98^n$, soit $v_n = -1940 \times 0,98^n$.

c. Pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 12500$

$$\iff u_n = v_n + 12500 = 12500 - 1940 \times 0,98^n.$$

d. Comme $0 < 0,98 < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,98^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 12500$

Sur le long terme, la centra solaire Big Sun possèdera 12 500 panneaux solaires.

Partie B - Modélisation à l'aide d'une fonction

1. La fonction f est une somme de fonctions dérivables sur $[0 ; +\infty[$ et sur cet intervalle :
$f'(x) = -0,02 \times (-500)\mathrm{e}^{-0,02x+1,4} = 10\mathrm{e}^{-0,02x+1,4}$.

Comme la fonction exponentielle est strictement positive, on en déduit que $f'(x) > 0$
la fonction est donc strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$

2. On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,02x+1,4} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 500\mathrm{e}^{-0,02x+1,4} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x) = 12500$.

3. Il faut résoudre l'inéquation :

$12500 - 500\mathrm{e}^{-0,02x+1,4} > 12000 \iff 500 > 500\mathrm{e}^{-0,02x+1,4} \iff 1 > \mathrm{e}^{-0,02x+1,4}$
$\iff \mathrm{e}^0 \geqslant \mathrm{e}^{-0,02x+1,4}$, soit par croissance de la fonction exponentielle :

$0 > -0,02x + 1,4 \iff 0,02x > 1,4$ et en multipliant chaque membre par 50 :

$x > 70$: il faut donc attendre 71 ans pour que le nombre de panneaux dépasse 12 000, soit en 2091.