Exercice 4 A **5 points**

Commun à tous les candidats

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B

Partie A :

Dans un pays, une maladie touche la population avec une probabilité de $0,05$.
On possède un test de dépistage de cette maladie.
On considère un échantillon de n personnes ($n \geqslant 20$) prises au hasard dans la population assimilé à un tirage avec remise.
On teste l'échantillon suivant cette méthode : on mélange le sang de ces n individus, on teste le mélange.
Si le test est positif, on effectue une analyse individuelle de chaque personne.
Soit X_n la variable aléatoire qui donne le nombre d'analyses effectuées.

1. Montrer X_n prend les valeurs 1 et $(n+1)$.
2. Prouver que $P(X_n = 1) = 0,95^n$.

   Établir la loi de X_n en recopiant sur la copie et en complétant le tableau suivant :

x_i	1	$n+1$
$P(X_n = x_i)$		

3. Que représente l'espérance de X_n dans le cadre de l'expérience ?

   Montrer que $E(X_n) = n + 1 - n \times 0,95^n$.

Partie B :

1. On considère la fonction f définie sur $[20\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \ln(x) + x\ln(0,95)$.

   Montrer que f est décroissante sur $[20\,;\,+\infty[$.
2. On rappelle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
3. Montrer que $f(x) = 0$ admet une unique solution a sur $[20\,;\,+\infty[$.

   Donner un encadrement à 0,1 près de cette solution.
4. En déduire le signe de f sur $[20\,;\,+\infty[$.

Partie C :

On cherche à comparer deux types de dépistages.
La première méthode est décrite dans la partie A, la seconde, plus classique, consiste à tester tous les individus.
La première méthode permet de diminuer le nombre d'analyses dès que $E(X_n) < n$.
En utilisant la partie B, montrer que la première méthode diminue le nombre d'analyses pour des échantillons comportant 87 personnes maximum.

CORRIGE

Exercice 4A **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A :

1. ✦ Si le test est négatif on aura fait un test : $X_n = 1$;

   ✦ Si le test est positif il faudra faire le test des n personnes plus le test global : $X_n = 1 + n$.

2. $P(X_n = 1)$ est la probabilité que l'on ne fasse qu'un test : le test des n personnes et que celui-ci soit négatif donc que les n personnes ne soient pas malades.

   La probabilité qu'une personne soit malade est égale à 0,05, donc qu'une personne soit saine $1 - 0,05 = 0,95$ et donc que n personnes soient saines est égale à $0,95^n$. Donc $P(X_n = 1) = 0,95^n$.

   On a donc $P(X_n = n+1) = 1 - 0,95^n$

x_i	1	$n+1$
$P(X_n = x_i)$	$0,95^n$	$1 - 0,95^n$

3. On a $E(X_n) = 1 \times 0,95^n + (n+1) \times (1 - 0,95^n) = 0,95^n + (n+1) - 0,95^n(n+1) = 0,95^n + n + 1 - n \times 0,95^n - 0,95^n = n + 1 - n \times 0,95^n$.

   Cette espérance représente le nombre moyen d'analyses à effectuer pour un échantillon n personnes : cette espérance est voisine de n.

Partie B :

1. $f(x) = \ln(x) + x\ln(0,95)$.

   f est une somme de fonctions dérivables sur $[20\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :

   $f'(x) = \dfrac{1}{x} + \ln(0,95)$.

   Or $20 \leqslant x \Rightarrow \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{20} \Rightarrow \dfrac{1}{x} + \ln 0,95 \leqslant \dfrac{1}{20} + \ln 0,95$.

   Or $\dfrac{1}{20} + \ln 0,95 \approx -0,001$; il en résulte que $f'(x) \leqslant 0$: la fonction f est décroissante sur $[20\,;\,+\infty[$.

2. On rappelle que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

On a puisque $x \neq 0$, $f(x) = x\left(\dfrac{\ln x}{x} + \ln 0,95\right)$.

Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} + \ln 0,95 = \ln 0,95 < 0$.

Finalement par produit de limites

puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} + \ln 0,95 = 0,95 < 0$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

3. La question précédente montre que f est décroissante de $f(20) = \ln 20 + 20 \ln 0,95 \approx 1,97$ à moins l'infini.

f est continue car dérivable sur $[20\,;\,+\infty[$ et prend ses valeurs dans les l'intervalle $]-\infty\,;\,f(20)]$ avec $f(20) \approx 1,97$.

Comme $0 \in]-\infty\,;\,f(20)]$, et que f est décroissante sur cet intervalle il existe donc un réel unique α tel que $f(\alpha) = 0$.

La calculatrice donne $f(87,0) \approx 0,003$ et $f(87,1) \approx -0,0005$, donc $87,0 < \alpha 87,1$.

4. D'après la question précédente :

$f(x) > 0$ sur $[20\,;\,\alpha[$ et $f(x) < 0$ sur $]\alpha\,;\,+\infty[$.

Partie C :

On a $E(X_n) < n \iff n + 1 - n \times 0,95^n < n \iff 1 < n \times 0,95^n$ ou en prenant le logarithme népérien $0 < \ln n + \ln(0,95^n) \iff 0 < \ln n + n \ln 0,95 \iff 0 < f(n) \iff f(n) > 0$.
Or on a vu à la fin de la partie B que la fonction f est positive sur l'intervalle $[20; 87]$.
Conclusion : tester toutes les personnes conduira à moins d'analyses qu'avec la méthode 1 avec des échantillons de 20 à 87 personnes au maximum. Au delà il vaut mieux utiliser la première méthode.