EXERCICE 4 B — 5 points

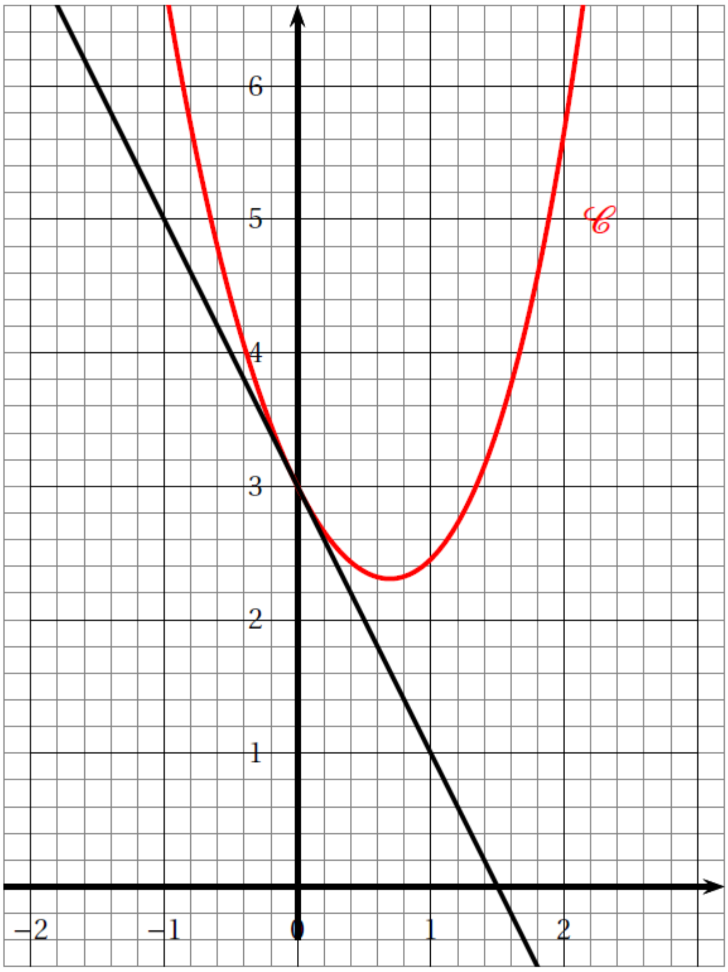
Commun à tous les candidats

Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B

Partie A : Détermination d'une fonction f et résolution d'une équation différentielle

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathrm{e}^x + ax + b\mathrm{e}^{-x}$

où a et b sont des nombres réels que l'on propose de déterminer dans cette partie.
Dans le plan muni d'un repère d'origine O, on a représenté ci-dessous la courbe $\mathscr{C}$, représentant la fonction f, et la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.



1. Par lecture graphique, donner les valeurs de f (0) et de f ' (0).

2. En utilisant l'expression de la fonction f , exprimer f (0) en fonction de b et en déduire la valeur de b.

3. On admet que la fonction f est dérivable Sur $\mathbb{R}$ et on note f ' sa fonction dérivée.

a. Donner, pour tout réel x, l'expression de f ' (x).

b. Exprimer f ' (0) en fonction de a.

c. En utilisant les questions précédentes, déterminer a, puis en déduire l'expression de f (x).

4. On considère l'équation différentielle : (E) : $y' + y = 2\mathrm{e}^x - x - 1$

a. Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \mathrm{e}^x - x + 2\mathrm{e}^{-x}$.
est solution de l'équation (E).

b. Résoudre l'équation différentielle $y' + y = 0$.

c. En déduire toutes les solutions de l'équation (E).

Partie B : Étude de la fonction g sur $[1 ; +\infty[$

1. Vérifier que pour tout réel x, on a : $\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - 2 = \left(\mathrm{e}^x - 2\right)\left(\mathrm{e}^x + 1\right)$

2. En déduire une expression factorisée de $g'(x)$, pour tout réel x.

3. On admettra que, pour tout $x \in [1 ; +\infty[$, $\mathrm{e}^x - 2 > 0$.
Étudier le sens de variation de la fonction g sur $[1 ; +\infty[$.

CORRIGE

Exercice 4B **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A : Détermination d'une fonction *f* et résolution d'une équation différentielle

$$f(x) = \mathrm{e}^x + ax + b\mathrm{e}^{-x}$$

1. - $f(0) \approx 3$;
   - $f'(0) \approx -2$ (coefficient directeur de la tangente)

2. On a $f(0) = 1 + b$. Or $1 + b = 3 \iff b = 2$.

3. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

   a. Sur $\mathbb{R}$, $f'(x) = \mathrm{e}^x + a - b\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^x + a - 2\mathrm{e}^{-x}$.

   b. Donc $f'(0) = 1 + a - 2 = a - 1$.

   c. On a vu que $f'(0) = -2 = a - 1 \iff a = -1$, donc finalement :

$$f(x) = \mathrm{e}^x - x + 2\mathrm{e}^{-x}$$

$$(E): \quad y' + y = 2\mathrm{e}^x - x - 1$$

4. **a.** $g(x) = \mathrm{e}^x - x + 2\mathrm{e}^{-x}$.
   g étant une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, on a sur cet intervalle :
   $g'(x) = \mathrm{e}^x - 1 - 2\mathrm{e}^{-x}$, soit en remplaçant dans l'équation (E) :
   $\mathrm{e}^x - 1 - 2\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x - x + 2\mathrm{e}^{-x} = 2\mathrm{e}^x - x - 1$ égalité vraie : g est donc une solution de l'équation différentielle (E).

   b. $y' + y = 0 \iff y' = -y$: on sait que les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions définies par : $x \longmapsto f(x) = K\mathrm{e}^{-x}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

   c. D'après les questions précédentes les solutions de l'équation (E) sont les fonctions définies que $\mathbb{R}$ par : $x \longmapsto \mathrm{e}^x - x + 2\mathrm{e}^{-x} + K\mathrm{e}^{-x}$, avec $K \in \mathbb{R}$.

Partie B : Étude de la fonction g sur $[1\,;\,+\infty[$

1. En posant $X = \mathrm{e}^x$, on a $X^2 - X - 2$ et ce trinôme a deux solutions évidentes 2 et -1.
   $X^2 - X - 2 = (X-2)(X+1)$, donc en revenant à l'écriture initiale :
   $\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - 2 = (\mathrm{e}^x - 2)(\mathrm{e}^x + 1)$ pour tout réel x.

2. $g'(x) = \mathrm{e}^x - 1 - 2\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}\left(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - 2\right)$, donc d'après la question précédente :
   $g'(x) = \mathrm{e}^{-x}(\mathrm{e}^x - 2)(\mathrm{e}^x + 1)$.

3. Puisque $\mathrm{e}^x - 2 > 0$ (admis), $\mathrm{e}^x + 1 > 1 > 0$ et $\mathrm{e}^{-x} > 0$, donc leur produit $g'(x) > 0$.
   Il en résulte que la fonction g est croissante sur $\mathbb{R}$, donc sur $[1\,;\,+\infty[$.