EXERCICE 3 — 5 points

Commun à tous les candidats

Dans le parc national des Pyrénées, un chercheur travaille sur le déclin d'une espèce protégée dans les lacs de haute-montagne : le « crapaud accoucheur ».

Les parties I et II peuvent être abordées de façon indépendante.

Partie I : Effet de l'introduction d'une nouvelle espèce.

Dans certains lacs des Pyrénées, des truites ont été introduites par l'homme afin de permettre des activités de pêche en montagne. Le chercheur a étudié l'impact de cette introduction sur la population de crapauds accoucheurs d'un lac.
Ses études précédentes l'amènent à modéliser l'évolution de cette population en fonction du temps par la fonction f suivante :

$$f(t) = \left(0,04t^2 - 8t + 400\right)\mathrm{e}^{\frac{t}{50}} + 40 \text{ pour } t \in [0\,;\,120]$$

La variable t représente le temps écoulé, en jour, à partir de l'introduction à l'instant $t = 0$ des truites dans le lac, et $f(t)$ modélise le nombre de crapauds à l'instant t.

1. Déterminer le nombre de crapauds présents dans le lac lors de l'introduction des truites.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,120]$ et on note f' sa fonction dérivée.
Montrer, en faisant apparaitre les étapes du calcul, que pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,120]$ on a :

$$f'(t) = t(t-100)\mathrm{e}^{\frac{t}{50}} \times 8 \times 10^{-4}.$$

3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,120]$, puis dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle (*on donnera des valeurs approchées au centième*).

4. Selon cette modélisation :

a. Déterminer le nombre de jours J nécessaires afin que le nombre de crapauds atteigne son minimum. Quel est ce nombre minimum ?

b. Justifier que, après avoir atteint son minimum, le nombre de crapauds dépassera un jour 140 individus.

c. À l'aide de la calculatrice, déterminer la durée en jour à partir de laquelle le nombre de crapauds dépassera 140 individus.

Partie II : Effet de la Chytridiomycose sur une population de têtards

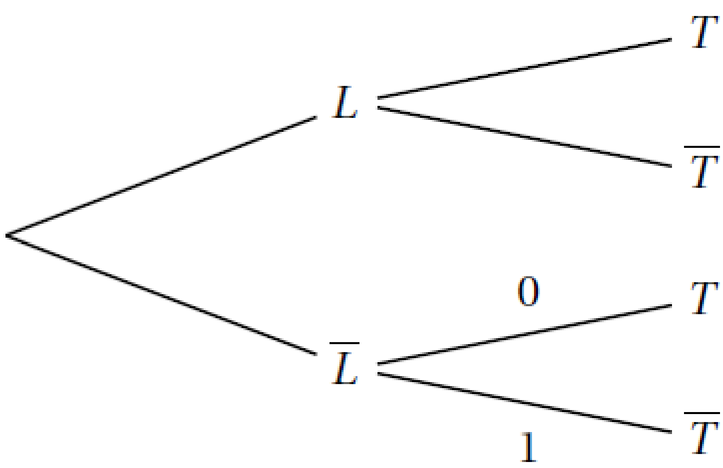
Une des principales causes du déclin de cette espèce de crapaud en haute montagne est une maladie, la « Chytridiomycose », provoquée par un champignon.
Le chercheur considère que :
- Les trois quarts des lacs de montagne des Pyrénées ne sont pas infectés par le champignon, c'est-à-dire qu'ils ne contiennent aucun têtard (larve du crapaud) contaminé.
- Dans les lacs restants, la probabilité qu'un têtard soit contaminé est de 0,74.

Le chercheur choisit au hasard un lac des Pyrénées, et y procède à des prélèvements.

Pour la suite de l'exercice, les résultats seront arrondis au millième lorsque cela est nécessaire.
Le chercheur prélève au hasard un têtard du lac choisi afin d'effectuer un test avant de le relâcher.
On notera T l'évènement « Le têtard est contaminé par la maladie »
et L l'évènement « Le lac est infecté par le champignon ».

On notera $\overline{L}$ l'évènement contraire de L et $\overline{T}$ l'évènement contraire de T.

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité suivant en utilisant les données de l'énoncé :



2. Montrer que la probabilité $P(T)$ que le têtard prélevé soit contaminé est de 0,185.

3. Le têtard n'est pas contaminé. Quelle est la probabilité que le lac soit infecté ?

2021 Métropole 3 – Ex 3 CORRIGE

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie I : Effet de l'introduction d'une nouvelle espèce.

Soit f la fonction définie pour $t \in [0\,;\,120]$ par : $f(t) = \left(0,04t^2 - 8t + 400\right)\mathrm{e}^{\frac{t}{50}} + 40.$

La variable t représente le temps écoulé, en jour, à partir de l'introduction à l'instant $t = 0$ des truites dans le lac, et $f(t)$ modélise le nombre de crapauds à l'instant t.

1. Pour $t = 0$, $f(0) = 400\,\mathrm{e}^0 + 40 = 440$ (crapauds)

2. Sur l'intervalle $[0; 120]$ en dérivant le produit :

$$f'(t) = (0,08t - 8)\mathrm{e}^{\frac{t}{50}} + \frac{1}{50}\left(0,04t^2 - 8t + 400\right)\mathrm{e}^{\frac{t}{50}} = \mathrm{e}^{\frac{t}{50}}\left[(0,08t - 8) + \frac{1}{50}\left(0,04t^2 - 8t + 400\right)\right]$$
$$= \mathrm{e}^{\frac{t}{50}}\left(0,08t - 8 + 0,0008t^2 - 0,16t + 8\right) = \mathrm{e}^{\frac{t}{50}}\left(-0,08t + 0,0008t^2\right)$$
$$= 0,0008\left(t^2 - 100t\right)\mathrm{e}^{\frac{t}{50}} = t(t-100)\mathrm{e}^{\frac{t}{50}} \times 8 \times 10^{-4}.$$

3. On sait que quel que soit $t \in [0\,;\,120]$, $\mathrm{e}^{\frac{t}{50}} > 0$: le signe de $f'(t)$ est donc celui du trinôme $t(t-100)$ qui est positif sauf sur l'intervalle $]0\,;\,100[$ (entre les racines du trinôme).

$f(0) = 480$, $f(100) = (400 - 800 + 400)\mathrm{e}^{\frac{100}{50}} + 40 = 0 + 40 = 40$ et

$f(120) = 576 - 960 + 400)\mathrm{e}^{\frac{120}{50}} + 40 = 16\mathrm{e}^{2,4} + 40 \approx 216,37.$

On dresse le tableau de variations de f sur l'intervalle $[0\,;\,120]$:

t	0		100		120
$t(t-100)$	0	$-$	0	$+$	
$f'(t)$	0	$-$	0	$+$	
f	440	$\searrow$	40	$\nearrow$	216,37

4. Selon cette modélisation :

a. On a vu dans la question précédente que $f(100) = 40$ est le minimum de la fonction f, on a donc $J = 100$.

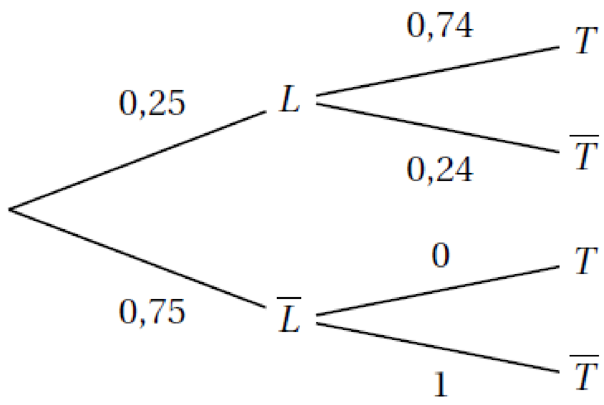
b. On a aussi vu que de 100 jours à 120 jours le nombre de crapauds croît strictement de 40 à environ 216 : il dépassera donc 140 individus.

c. Soit J_{140} la durée en jour à partir de laquelle le nombre de crapauds dépassera 140 individus. La calculatrice donne :

$f(115) \approx 130 < 140$ et $f(116) \approx 144 > 140$, donc $J_{140} = 116$.

Partie II : Effet de la Chytridiomycose sur une population de têtards

1. On complète l'arbre de probabilité suivant en utilisant les données de l'énoncé :



2. D'après la loi des probabilités totales :

$$P(T) = P(L \cap T) + P\left(\overline{L} \cap T\right) = P(L) \times P_L(T) + P\left(\overline{L}\right) \times P_{\overline{L}}(T) = 0,25 \times 0,74 + 0,75 \times 0 = 0,185$$

3. Le têtard n'est pas contaminé. La probabilité que le lac soit infecté est :

$$P_{\overline{T}}(L) = \frac{P\left(L \cap \overline{T}\right)}{P\left(\overline{T}\right)} = \frac{0,25 \times 0,26}{1 - 0,185} = \frac{0,065}{0,815} \approx 0,0797, \text{ soit } 0,080 \text{ au millième près.}$$