

**EXERCICE 4 B****5 points****Commun à tous les candidats****Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B****Partie I**

On considère la fonction  $h$  définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par :  $h(x) = 1 + \frac{\ln(x)}{x}$ .

1. Déterminer la limite de la fonction  $h$  en 0.
2. Déterminer la limite de la fonction  $h$  en  $+\infty$ .
3. On note  $h'$  la fonction dérivée de  $h$ . Démontrer que, pour tout nombre réel  $x$  de  $]0 ; +\infty[$ ,

$$\text{on a : } h'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}.$$

4. Dresser le tableau de variations de la fonction  $h$  sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .
5. Démontrer que l'équation  $h(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $]0 ; +\infty[$ .  
Justifier que l'on a :  $0,5 < \alpha < 0,6$ .

**Partie II**

Dans cette partie, on considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $]0 ; +\infty[$  par :

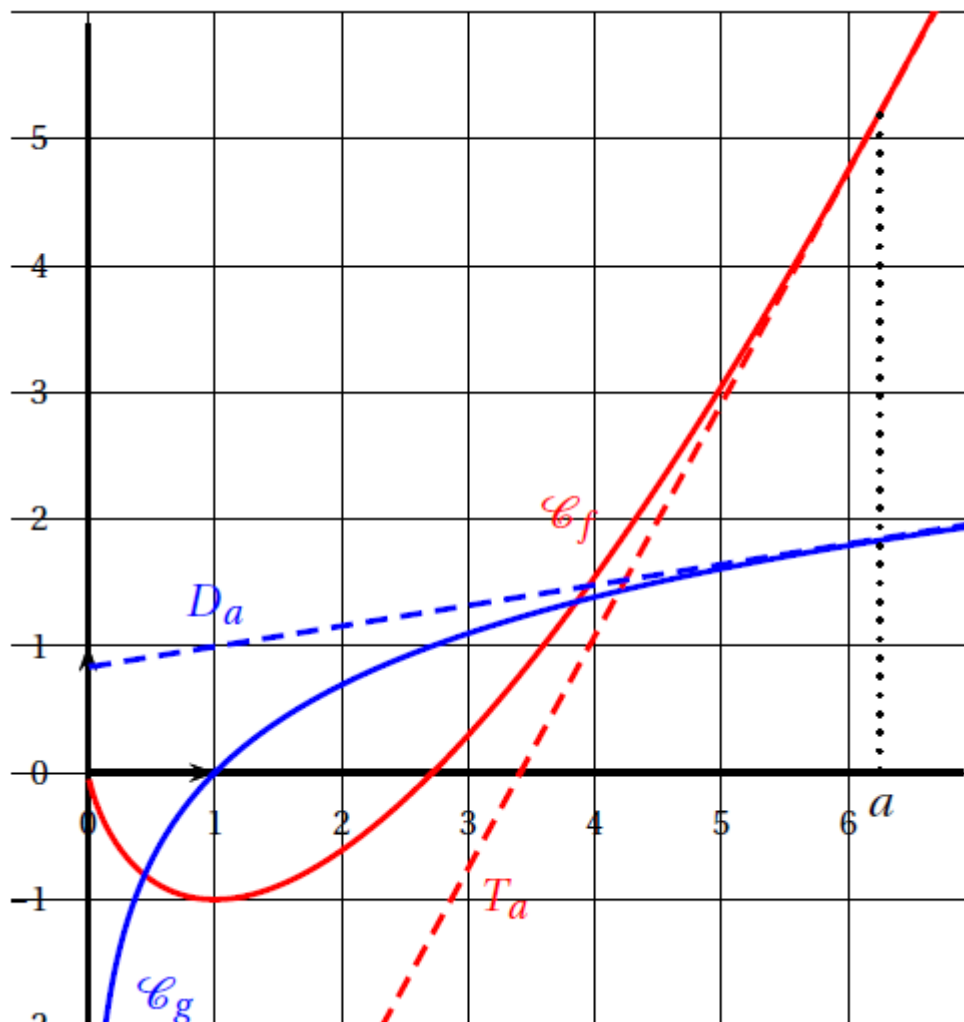
$$f(x) = x \ln(x) - x; \quad g(x) = \ln(x).$$

On note  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  les courbes représentant respectivement les fonctions  $f$  et  $g$  dans un repère orthonormé  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ .

Pour tout nombre réel  $a$  strictement positif, on appelle :

- $T_a$  la tangente à  $\mathcal{C}_f$  en son point d'abscisse  $a$ ;
- $D_a$  la tangente à  $\mathcal{C}_g$  en son point d'abscisse  $a$ .

Les courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  ainsi que deux tangentes  $T_a$  et  $D_a$  sont représentées ci-dessous.



On recherche d'éventuelles valeurs de  $a$  pour lesquelles les droites  $T_a$  et  $D_a$  sont perpendiculaires.

Soit  $a$  un nombre réel appartenant à l'intervalle  $]0 ; +\infty[$ .

1. Justifier que la droite  $D_a$  a pour coefficient directeur  $\frac{1}{a}$ .
2. Justifier que la droite  $T_a$  a pour coefficient directeur  $\ln(a)$ .

On rappelle que dans un repère orthonormé, deux droites de coefficients directeurs respectifs  $m$  et  $m'$  sont perpendiculaires si et seulement si  $mm' = -1$ .

3. Démontrer qu'il existe une unique valeur de  $a$ , que l'on identifiera, pour laquelle les droites  $T_a$  et  $D_a$  sont perpendiculaires.

**EXERCICE 4 B****5 points****Commun à tous les candidats****Le candidat doit traiter un seul des deux exercices A ou B****Partie I**

On considère la fonction  $h$  définie sur l'intervalle  $]0 ; +\infty[$  par :  $h(x) = 1 + \frac{\ln(x)}{x}$ .

1.  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$ , et  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$ .

Par produit on déduit que  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln x}{x} = -\infty$  et donc que  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} h(x) = -\infty$ .

2. On sait que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 1$

3. La fonction  $h$  est dérivable comme quotient de fonctions dérivables sur  $]0 ; +\infty[$  et sur cet intervalle :  $h'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ .

Pour le détail :  $h = U + V$  avec  $V = \frac{u}{v} \dots$

4. Comme  $x^2 > 0$  pour  $x \in ]0 ; +\infty[$  le signe de  $h'(x)$  est celui du numérateur  $1 - \ln x$  :

- $1 - \ln x = 0 \iff 1 = \ln x \iff e = x$  :  
la fonction  $h$  a un maximum  $f(e) = 1 + \frac{\ln e}{e} = 1 + \frac{1}{e}$ .

- $1 - \ln x > 0 \iff 1 > \ln x \iff e > x$  :  
la fonction  $h$  est donc strictement croissante sur  $]0 ; e[$ ;

D'où le tableau de variations de  $h$  :

| $x$     | 0         | $e$               | $+\infty$ |
|---------|-----------|-------------------|-----------|
| $h'(x)$ |           | 0                 |           |
| $h$     | $-\infty$ | $1 + \frac{1}{e}$ | 1         |

Sur  $[e ; +\infty[$ ,  $h(x) > 1$  donc l'équation  $h(x) = 0$  n'a pas de solution.

Sur  $]0 ; e[$ ,  $h$  est continue et strictement croissante, et 0 est compris entre  $-\infty$  et  $1 + 1/e > 0$ .

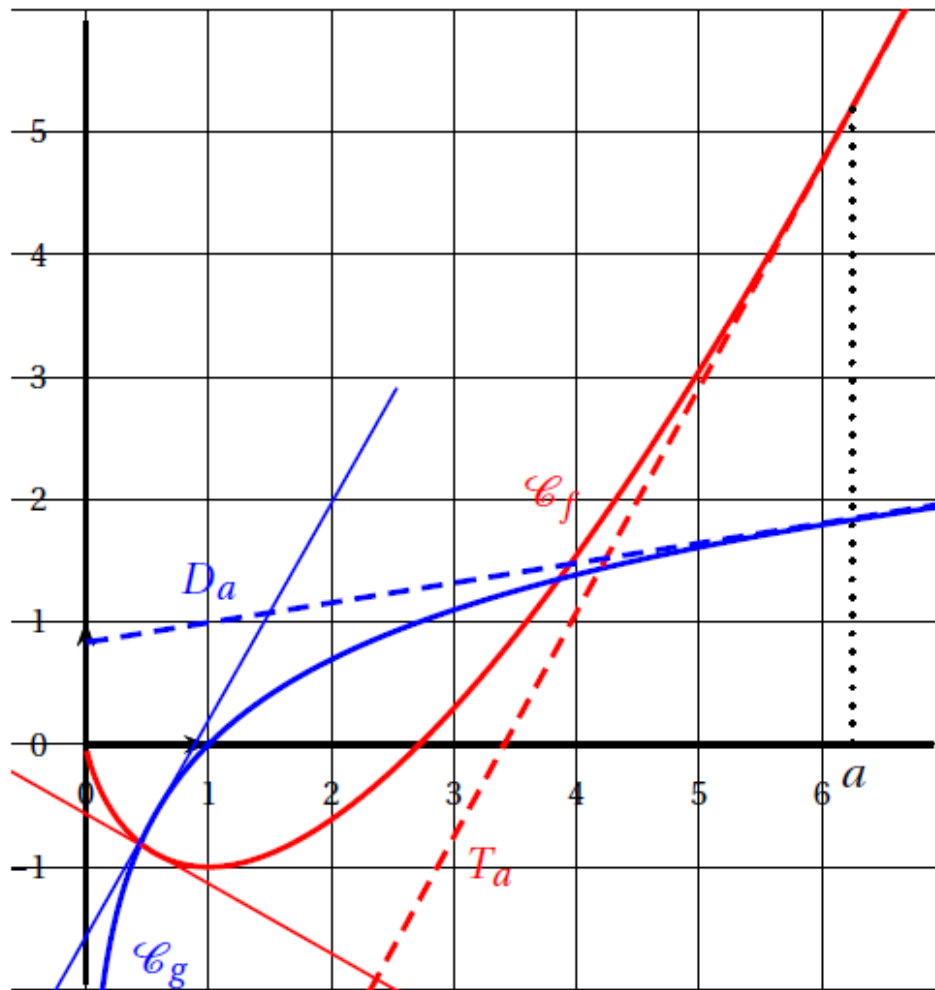
L'équation  $h(x) = 0$  admet donc une solution unique  $\alpha$  sur  $]0 ; e[$ , d'après le corollaire du **théorème des valeurs intermédiaires**.

A l'aide de la calculatrice, on trouve :  $0,5 < \alpha < 0,6$ .

## Partie II

Dans cette partie, on considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $]0 ; +\infty[$  par :

$$f(x) = x \ln(x) - x; \quad g(x) = \ln(x).$$



1. La fonction  $f$  est dérivable sur  $]0 ; +\infty[$  et sur cet intervalle :

$$f'(x) = \ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$$

Donc le coefficient directeur de la tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point de la courbe d'abscisse  $a$  est égal à  $f'(a) = \ln(a)$ .

2. La fonction  $g$  est dérivable sur  $]0 ; +\infty[$  et sur cet intervalle :  $g'(x) = \frac{1}{x}$ .

Donc le coefficient directeur de la tangente à  $\mathcal{C}_g$  au point de la courbe d'abscisse  $a$  est égal à  $g'(a) = \frac{1}{a}$ .

3. Le produit des coefficients directeurs est égal à  $-1$ , soit :

$$\ln(a) \times \frac{1}{a} = -1 \iff \frac{\ln(a)}{a} = -1 \iff 1 + \frac{\ln(a)}{a} = 0 \iff h(a) = 0$$

et on a vu à la fin de la partie I que cette équation n'avait qu'une solution  $a = \alpha$  : il existe une seule valeur de  $a$  telle que les droites  $T_a$  et  $D_a$  sont perpendiculaires :  $a = \alpha$ .

Voir la figure.