EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Une entreprise reçoit quotidiennement de nombreux courriels (courriers électroniques).
Parmi ces courriels, 8 % sont du « spam », c'est-à-dire des courriers à intention publicitaire, voire malveillante, qu'il est souhaitable de ne pas ouvrir.
On choisit au hasard un courriel reçu par l'entreprise.
Les propriétés du logiciel de messagerie utilisé dans l'entreprise permettent d'affirmer que :

- La probabilité que le courriel choisi soit classé comme « indésirable » sachant que c'est un spam est égale à $0,9$.
- La probabilité que le courriel choisi soit classé comme « indésirable » sachant que ce n'est pas un spam est égale à $0,01$.

On note :

- S l'évènement « le courriel choisi est un spam » ;
- I l'évènement « le courriel choisi est classé comme indésirable par le logiciel de messagerie ».
- $\overline{S}$ et $\overline{I}$ les évènements contraires de S et I respectivement.

1. Modéliser la situation étudiée par un arbre pondéré, sur lequel on fera apparaître les probabilités associées à chaque branche.

2. **a.** Démontrer que la probabilité que le courriel choisi soit un message de spam et qu'il soit classé indésirable est égale à $0,072$.

b. Calculer la probabilité que le message choisi soit classé indésirable.

c. Le message choisi est classé comme indésirable. Quelle est la probabilité que ce soit effectivement un message de spam ? On donnera un résultat arrondi au centième.

3. On choisit au hasard 50 courriels parmi ceux reçus par l'entreprise. On admet que ce choix se ramène à un tirage au hasard avec remise de 50 courriels parmi l'ensemble des courriels reçus par l'entreprise.

On appelle Z la variable aléatoire dénombrant les courriels de spam parmi les 50 choisis.

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire Z, et quels sont ses paramètres ?

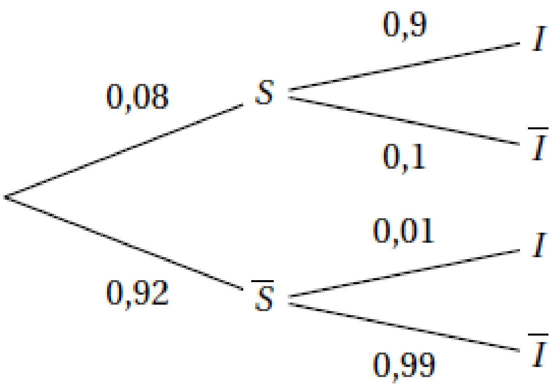
b. Quelle est la probabilité que, parmi les 50 courriels choisis, deux au moins soient du spam ? On donnera un résultat arrondi au centième.

CORRIGE

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

1.



2. **a.** On a $P(S \cap I) = P(S) \times P_S(I) = 0,08 \times 0,9 = 0,072$

b. On a de même $P\left(\overline{S} \cap I\right) = P\left(\overline{S}\right) \times P_{\overline{S}}(I) = 0,92 \times 0,01 = 0,0092$.

D'après la loi des probabilités totales :

$P(I) = P(S \cap I) + P\left(\overline{S} \cap I\right) = 0,072 + 0,0092 = 0,0812$.

c. Il faut calculer $P_I(S) = \dfrac{P(I \cap S)}{P(I)} = \dfrac{0,072}{0,0812} \approx 0,887$ soit 0,89 au centième près.

3. **a.** Les tirages étant indépendants les uns des autres et étant assez nombreux on peut considérer que la variable Z suit une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,08$.

b. On a $P(Z = 0) = 0,08^0 \times 0,92^{50} \approx 0,015466$;

$P(Z = 1) = \binom{50}{1} \times 0,08 \times 0,92^{49} \approx 0,067426$, donc

$P(Z \geqslant 2) = 1 - [P(Z = 0) + P(Z = 1)] = 1 - (0,015466 + 0,067426) \approx 0,917$, soit 0,92 au centième près.