

EXERCICE – A

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_0 = 16$; $v_0 = 5$;

$$\text{et pour tout entier naturel } n : \begin{cases} u_{n+1} = \frac{3u_n + 2v_n}{5} \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et v_1 .
2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = u_n - v_n$.
 - a. Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison 0,1.
En déduire, pour tout entier naturel n , l'expression de w_n en fonction de n .
 - b. Préciser le signe de la suite (w_n) et la limite de cette suite.
3.
 - a. Démontrer que, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} - u_n = -0,4w_n$.
 - b. En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est croissante. On admet ce résultat, et on remarque qu'on a alors : pour tout entier naturel n , $v_n \geq v_0 = 5$.

- c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq 5$.
En déduire que la suite (u_n) est convergente. On appelle ℓ la limite de (u_n) .

On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est convergente. On admet ce résultat, et on appelle ℓ' la limite de (v_n) .

4.
 - a. Démontrer que $\ell = \ell'$.
 - b. On considère la suite (c_n) définie pour tout entier naturel n par : $c_n = 5u_n + 4v_n$.
Démontrer que la suite (c_n) est constante, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n , on a : $c_{n+1} = c_n$.
En déduire que, pour tout entier naturel n , $c_n = 100$.
 - c. Déterminer la valeur commune des limites ℓ et ℓ' .

CORRIGE

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par : $u_0 = 16$; $v_0 = 5$;

et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \frac{3u_n + 2v_n}{5} \\ v_{n+1} &= \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1. • $u_1 = \frac{3 \times 16 + 2 \times 5}{5} = \frac{58}{5}$;

• $v_1 = \frac{16 + 5}{2} = \frac{21}{2}$.

2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = u_n - v_n$.

a. On a quel que soit $n \in \mathbb{N}$,

$$w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{3u_n + 2v_n}{5} - \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{6u_n + 4v_n - 5u_n - 5v_n}{10} = \frac{u_n - v_n}{10} = \frac{w_n}{10}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'égalité $w_{n+1} = \frac{1}{10} w_n$ montre que la suite (w_n) est géométrique de raison $\frac{1}{10} = 0,1$ et de premier terme $w_0 = u_0 - v_0 = 16 - 5 = 11$.

On sait qu'alors pour tout naturel n , $w_n = 11 \times (0,1)^n$.

b. Comme $0,1 > 0 \Rightarrow 0,1^n > 0$ et $11 > 0$, donc la suite (w_n) est une suite de nombres supérieurs à zéro.

D'autre part $0 < 0,1 < 1$ entraîne que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,1^n = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$.

3. a. Pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 2v_n}{5} - u_n = \frac{3u_n + 2v_n}{5} - \frac{5u_n}{5} = \frac{-2u_n + 2v_n}{5} = -\frac{2}{5}(u_n - v_n) = -\frac{2}{5}w_n = -\frac{4}{10}w_n = -0,4w_n$

b. On a vu à la question 2. b. que $w_n > 0$, quel que soit le naturel n , donc $-0,4w_n < 0$ et par conséquent :

$u_{n+1} - u_n < 0 \iff u_{n+1} < u_n$, ce qui montre que la suite (u_n) est décroissante.

On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est croissante. On admet ce résultat, et on remarque qu'on a alors : pour tout entier naturel n , $v_n \geq v_0 = 5$.

c. On va démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq 5$.

Initialisation : On a $u_0 = 16 \geq 5$: la proposition est vraie au rang $n = 0$.

Hérédité : on suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \geq 5$.

On a donc $3u_n \geq 15$ (1) et comme on a admis que $v_n \geq 5$, on a $2v_n \geq 10$ (2).

On peut ajouter membre à membre (1) et (2) pour obtenir :

$3u_n + 2v_n \geq 25$ d'où en multipliant par le nombre positif $\frac{1}{5}$:

$$\frac{3u_n + 2v_n}{5} \geq 5 \text{ et finalement } u_{n+1} \geq 5.$$

Conclusion : la minoration par 5 est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n , elle l'est aussi au rang $n+1$; d'après le principe de récurrence on a donc quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 5$.

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 5 : d'après le théorème de la convergence monotone, elle converge vers une limite $\ell \geq 5$.

On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est convergente.

On admet ce résultat, et on appelle ℓ' la limite de (v_n) .

4. a. On a vu à la question 2.b. que $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$ ou encore que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Les deux suites (u_n) et (v_n) étant convergentes, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ et donc que $\ell = \ell'$.

- b. On considère la suite (c_n) définie pour tout entier naturel n par : $c_n = 5u_n + 4v_n$.

$$\begin{aligned} \text{Donc : } c_{n+1} &= 5u_{n+1} + 4v_{n+1} = 3u_n + 2v_n + 2(u_n + v_n) = 3u_n + 2v_n + 2u_n + 2v_n \\ &= 5u_n + 4v_n = c_n. \end{aligned}$$

Donc la suite (c_n) est constante.

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, c_n = c_0 = 5u_0 + 4v_0 = 5 \times 16 + 4 \times 5 = 80 + 20 = 100.$$

- c. Puisque $c_n = 5u_n + 4v_n$ et que (u_n) et (v_n) ont même limite ℓ , on a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 100 = 100 = 5\ell + 4\ell = 9\ell.$$

$$9\ell = 100 \text{ donc } \ell = \frac{100}{9}.$$