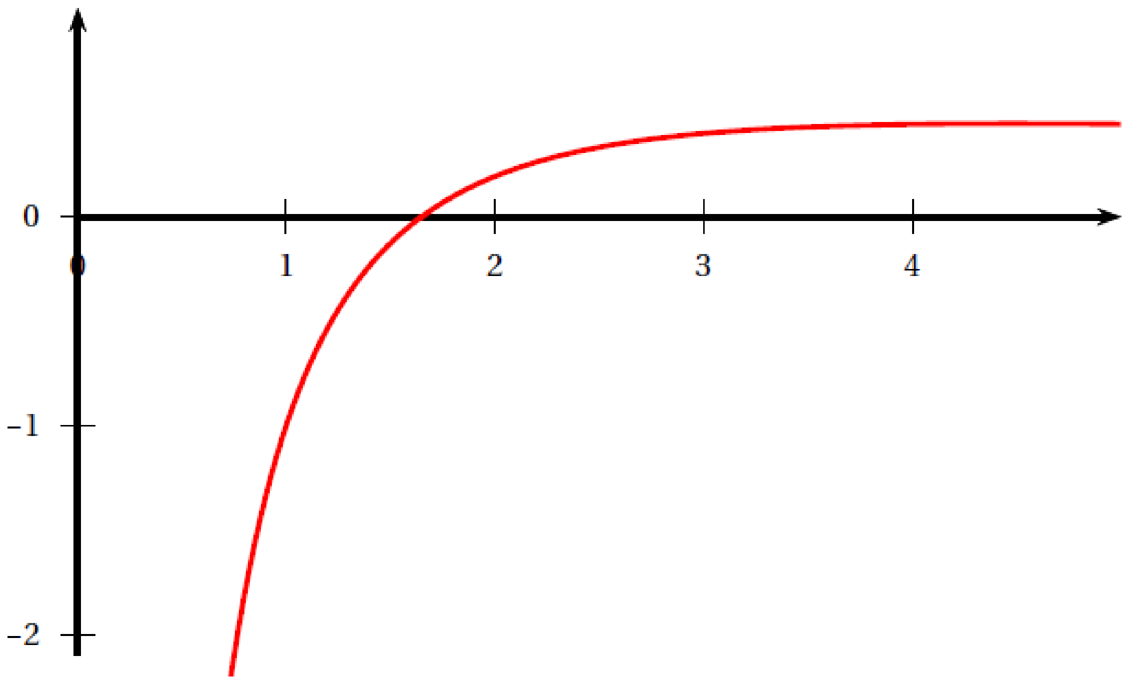
EXERCICE – B

Partie 1

Le graphique ci-dessous donne la représentation graphique dans un repère orthonormé de la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{2\ln(x) - 1}{x}$.



1. Déterminer par le calcul l'unique solution α de l'équation $f(x) = 0$.
   On donnera la valeur exacte de α ainsi que la valeur arrondie au centième.
2. Préciser, par lecture graphique, le signe de $f(x)$ lorsque x varie dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

Partie II

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $g(x) = [\ln(x)]^2 - \ln(x)$.

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction g en 0.
   b. Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
2. On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   Démontrer que, pour tout nombre réel x de $]0\,;\,+\infty[$, on a : $g'(x) = f(x)$, où f désigne la fonction définie dans la partie I.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   On fera figurer dans ce tableau les limites de la fonction g en 0 et en $+\infty$, ainsi que la valeur du minimum de g sur $]0\,;\,+\infty[$.
4. Démontrer que, pour tout nombre réel $m > -0,25$, l'équation $g(x) = m$ admet exactement deux solutions.
5. Déterminer par le calcul les deux solutions de l'équation $g(x) = 0$.

CORRIGE

Partie I

1. Dans $]0\,;\,+\infty[$, $f(x)=0 \iff \dfrac{2\ln(x)-1}{x}=0$, on a donc

$2\ln(x)-1=0 \iff 2\ln(x)=1 \iff \ln(x)=\dfrac{1}{2} \iff x=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$. $\qquad S=\left\{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right\}$.

Rem. $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\mathrm{e}}\approx 1{,}649\approx 1{,}65$ au centième près.

2.
- Sur $\left]0\,;\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right[$, on a $f(x)<0$;
- Sur $\left]\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\,;\,+\infty\right[$, on a $f(x)>0$;
- $f\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)=0$.

Partie II

$$g(x)=[\ln(x)]^2-\ln(x).$$

1. **a.** On a $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to 0}(\ln x)^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0}(-\ln x)=+\infty$, donc par somme de limites :

$$\lim_{x\to 0} g(x)=+\infty.$$

b. $g(x)=\ln(x)[\ln(x)-1]$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)-1=+\infty$, on obtient par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

2. La fonction $g(x)=\ln(x)[\ln(x)-1]$ est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables sur $]0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :

$$g'(x)=\frac{1}{x}\times[\ln(x)-1]+\ln(x)\times\frac{1}{x}=\frac{1}{x}[\ln(x)-1+\ln(x)]=\frac{1}{x}\times(2\ln(x)-1)=\frac{2\ln(x)-1}{x}=f(x).$$

3. Le signe de $f(x)=g'(x)$ a été trouvé à la question 2 de la partie I; on a donc :
- Sur $\left]0\,;\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right[$, on a $g'(x)<0$: la fonction g est strictement décroissante sur cet inter-valle
- Sur $\left]\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\,;\,+\infty\right[$, on a $g'(x)>0$: la fonction g est strictement croissante sur cet inter valle
- $g'\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)=0$: $g\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{4}$ est le minimum de la fonction g sur $]0\,;\,+\infty[$.

x	0		$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Comme $-\frac{1}{4}=-0{,}25$, le tableau de variations montre que l'équation $g(x)=m$, avec $m>-0{,}25$ a deux solutions, l'une sur l'intervalle $\left]0\,;\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\right[$, l'autre sur $\left]\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}\,;\,+\infty\right[$.

5. Dans $]0\,;\,+\infty[$, $g(x)=0 \iff \ln(x)[\ln(x)-1]=0 \iff \left\{\begin{array}{lcl}\ln(x)&=&0\\ \ln(x)-1&=&0\end{array}\right.$

$\iff \left\{\begin{array}{lcl}\ln(x)&=&0\\ \ln(x)&=&1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl}x&=&1\\ x&=&\mathrm{e}\end{array}\right. \qquad S=\{1\,;\,\mathrm{e}\}.$