Raisonnement par Recurrence

► *Exemple 1 :*

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $n^2 + n + 2$ est un nombre pair.

► *Exemple 2 :*

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 2$, et pour tout entier naturel *n*,

$$U_{n+1} = \frac{3}{4}U_n + \frac{1}{2}$$

Calculer les trois premiers termes.
Quelle conjecture peut-on faire concernant l'expression de U_n ? Démontrer ce résultat.

► *Exemple 3 :*

On considère la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $V_0 = 2$, et pour tout entier naturel *n*,

$$V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n + 3$$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, $0 \leq V_n \leq 6$.

► *Exemple 4 :*

On considère la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $W_0 = 4$, et pour tout entier naturel *n*,

$$W_{n+1} = W_n + 2n + 5$$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, $W_n = (n+2)^2$.

► *Exemple 5* :*

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 6$, $2^n \geq (n+2)^2$

Mémo	**RAISONNEMENT PAR RECURRENCE**

Le principe :

On montre qu'une proposition est vraie à un rang (*le premier en général*).
Puis, on fait l'hypothèse qu'il existe un rang quelconque, que l'on nomme p, où la proposition est vraie, et on démontre que, sachant cela, la proposition est vraie au rang suivant p+1.
Du coup, comme la proposition est vraie au rang 1, alors elle est vraie au rang 2,
Et comme la proposition est vraie au rang 2, alors elle est vraie au rang 3,
Et comme la proposition est vraie au rang 3, alors elle est vraie au rang 4, et ainsi de suite ...
La proposition est donc vraie à tous les rangs !

La rédaction:

Elle diffère suivant les profs et les livres, mais au final elles veulent toutes dire la même chose :

Soit P_n la proposition au rang n : "......................................"

1) <u>Initialisation</u> :

Montrons que la proposition est vraie au 1er rang n_0

(*souvent cela revient à prouver que P_0 est vraie*)

2) <u>Hérédité</u> :

Supposons qu'il existe un entier p dans $\mathbb{N}$ supérieur à n_0 tel que P_p soit vraie, montrons alors que P_{p+1} est vraie.

3) <u>Conclusion</u> :

On a montré que P_n est vraie au premier rang, et qu'elle est héréditaire, **donc P_n est vraie pour tout entier n à partir du 1^er^ rang n_0.**

CORRECTION

► Exemple 1 :

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $n^2 + n + 2$ est un nombre pair.

Considérons la propriété : $\mathscr{P}_n$: « n^2+n+2 est un nombre pair » .

- $\mathscr{P}_0$ est vraie car $0^2+0+2=2$ est pair.
- Supposons que $\mathscr{P}_p$ soit vraie pour un entier naturel p .

  Alors p^2+p+2 est un nombre pair. Donc il existe un entier k tel que $p^2+p+2=2k$

  $(p+1)^2+(p+1)+2=p^2+2p+1+p+1+2=p^2+p+2p+2=2k+2p+4=2(k+p+2)$

  donc $(p+1)^2+(p+1)+2 = 2k'$ où $k' = k + p + 2$ entier.

  donc $(p+1)^2+(p+1)$ est pair $\mathscr{P}_{p+1}$ est donc vraie. La propriété est héréditaire.
- **CONCLUSION : Pour tout entier naturel n , $\mathscr{P}_n$ est vraie .**

► Exemple 2 :

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0=2$, et pour tout entier naturel *n*, $U_{n+1}=\frac{3}{4}U_n+\frac{1}{2}$

Calculer les trois premiers termes.

Quelle conjecture peut-on faire concernant l'expression de U_n ? Démontrer ce résultat.

$U_0=2$, $\boxed{U_1 = 2}$ et $\boxed{U_2 = 2}$....

On conjecture que $U_n=2$ pour tout entier naturel *n*.

Démontrons cette propriété par récurrence.

Considérons la propriété : « $U_n=2$ » .

- La propriété est vraie pour *n* = 0, car $U_0=2$.
- Supposons que la propriété soit vraie pour un entier naturel *k*.

  Alors $U_k=2$.

  Or $U_{n+1}=\frac{3}{4}U_n+\frac{1}{2}$ donc $U_{k+1}=\frac{3}{4}U_k+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\times 2+\frac{1}{2}=2$ donc $U_{k+1}=2$.

  La propriété est donc vraie pour *n* = *k* + 1. La propriété est héréditaire.
- CONCLUSION : Pour tout entier naturel *n*, $U_n=2$.

► Exemple 3 :

On considère la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $V_0 = 2$, et pour tout entier naturel *n*, $V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n + 3$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, $0 \leq V_n \leq 6$.

Considérons la propriété : « $0 \leq V_n \leq 6$ ».

- La propriété est vraie pour *n* = 0, car $V_0 = 2$ donc $0 \leq V_0 \leq 6$.
- Supposons que la propriété soit vraie pour un entier naturel *k*.

  Alors $0 \leq V_k \leq 6$.

  On a alors $0 \leq \frac{1}{2}V_k \leq 3$ donc $3 \leq \frac{1}{2}V_k + 3 \leq 6$ donc $3 \leq V_{k+1} \leq 6$

  Or $0 \leq 3$ donc $0 \leq 3 \leq V_{k+1} \leq 6$ et donc $0 \leq V_{k+1} \leq 6$.

  La propriété est donc vraie pour *n* = *k* + 1. La propriété est héréditaire.
- CONCLUSION : Pour tout entier naturel *n*, $0 \leq V_n \leq 6$.

► Exemple 4 :

On considère la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $W_0 = 4$, et pour tout entier naturel *n*,

$W_{n+1} = W_n + 2n + 5$

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, $W_n = (n+2)^2$.

Considérons la propriété : « $W_n = (n+2)^2$ ».

- La propriété est vraie pour *n* = 0, car $W_0 = 4 = (0+2)^2$.
- Supposons que la propriété soit vraie pour un entier naturel *k*.

  Alors $W_k = (k+2)^2$.

  Or $W_{n+1} = W_n + 2n + 5$

  donc $W_{k+1} = W_k + 2k + 5 = (k+2)^2 + 2k + 5 = k^2 + 4k + 4 + 2k + 5 = k^2 + 6k + 9 = (k+3)^2$

  donc $W_{k+1} = \left(\left(k+1\right)+2\right)^2$.

  La propriété est donc vraie pour *n* = *k* + 1. La propriété est héréditaire.
- CONCLUSION : Pour tout entier naturel *n*, $W_n = (n+2)^2$.

► *Exemple 5* :*

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 6$, $2^n \geq (n+2)^2$.

Considérons la propriété : « $2^n \geq (n+2)^2$ ».

- La propriété est vraie pour $n = 6$, car $2^6 = 64$ et $(6+2)^2 = 64$ donc $2^6 \geq (6+2)^2$.
- Supposons que la propriété soit vraie pour un entier naturel $k \geq 6$.

  Alors $2^k \geq (k+2)^2$.

  Donc $2 \times 2^k \geq 2 \times (k+2)^2$

  donc $2^{k+1} \geq 2(k^2 + 4k + 4)$

  donc $2^{k+1} \geq 2k^2 + 8k + 8$.

  Il faut prouver que $2^{k+1} \geq (k+3)^2$ et $(k+3)^2 = k^2 + 6k + 9$.

  $2k^2 + 8k + 8 = k^2 + 6k + 9 + k^2 + 2k - 1 \geq k^2 + 6k + 9$ car $k^2 + 2k - 1 \geq 0$. (car $k \geq 6$)

  donc $2^{k+1} \geq 2k^2 + 8k + 8 \geq k^2 + 9k + 9$

  donc $2^{k+1} \geq (k+3)^2$.

  La propriété est donc vraie pour $n = k + 1$. La propriété est héréditaire.
- CONCLUSION : Pour tout entier naturel $n \geq 6$, on a $2^n \geq (n+2)^2$.