SUITES – 2e partie

▶ Exercice 7

Montrer que la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par $U_n = n^2 + 3n$ est croissante.

▶ Exercice 8

Montrer que la suite (U_n) définie pour tout entier n non nul par $U_n = \left(\dfrac{1}{4}\right)^n n^2$ est décroissante.

▶ Exercice 9

Soit (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = 2U_n - 3$.
Montrer par récurrence, que la suite (U_n) est décroissante.

▶ Exercice 10

Etudier le sens de variation de la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par $U_n = \dfrac{n-1}{n+1}$.

▶ Exercice 11

Etudier la monotonie des suites suivantes :

1°) (U_n) suite définie par $U_0 = 2$ et pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = U_n^{\ 2} - U_n + 1$.

2°) (V_n) suite définie pour tout entier naturel $n \geq 2$ par : $V_n = \dfrac{-n+2}{n-1}$.

3°) (W_n) suite définie par $W_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $W_{n+1} = W_n^{\ 2} - W_n + 1$.

Mémo 2 — SUITES - SENS DE VARIATION

Déf : La suite (U_n) est ***croissante*** (resp. ***décroissante***) à partir du rang n_0 si ,
pour tout entier $n \geq n_0$ on a $U_n \leq U_{n+1}$ (resp. $U_n \geq U_{n+1}$) .

Déf : La suite (U_n) est ***constante*** à partir du rang n_0 si , pour tout entier $n \geq n_0$, on a $U_{n+1} = U_n$.

Déf : Une suite est ***monotone*** si elle est croissante ou si elle est décroissante.

TECHNIQUES

a) **Signe de** $U_{n+1} - U_n$.

b) **Comparaison de** $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ **avec 1 , dans le cas où** $U_n > 0$.

c) **Technique fonctionnelle** (cas où $U_n = f(n)$) .

Th : Soient $n_0 \in \mathbf{N}$ et $U_n = f(n)$; Si f est croissante (*resp.* décroissante) sur $[\, n_0, +\infty [$,
alors la suite (U_n) est croissante (*resp.* décroissante) à partir du rang n_0.

d) **Raisonnement par récurrence**.

CORRECTION

▶ *Exercice 7*

Montrer que la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par $U_n = n^2 + 3n$ est croissante.

SOLUTION

1e méthode :

$U_{n+1} - U_n = (n+1)^2 + 3(n+1) - n^2 - 3n = n^2 + 2n + 1 + 3n + 3 - n^2 - 3n = 2n + 4$

$2n + 4 > 0$ donc $U_{n+1} - U_n > 0$ donc la suite (U_n) est croissante.

2e méthode :

$U_n = f(n)$ avec $f(x) = x^2 + 3x$.

$f'(x) = 2x + 3$ On a $f'(x) > 0$ donc f est croissante, donc la suite (U_n) est croissante.

Théorème 1 :

Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $U_n = f(n)$; Si f est croissante (*ou décroissante*) sur $[n_0, +\infty[$,
alors la suite (U_n) est croissante (*ou décroissante*) à partir du rang n_0.

▶ *Exercice 8**

Montrer que la suite (U_n) définie pour tout entier n non nul par $U_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n n^2$ est décroissante.

SOLUTION

$U_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n n^2 > 0$ car n entier naturel non nul.

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}(n+1)^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^n n^2} = \frac{\frac{1}{4}(n+1)^2}{n^2} = \frac{1}{4}\frac{(n+1)^2}{n^2}$$

Nous cherchons à prouver que $\frac{1}{4}\frac{(n+1)^2}{n^2} \leq 1$. Calculons la différence de ces deux nombres.

$1 - \frac{1}{4}\frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{4n^2 - (n+1)^2}{4n^2} = \frac{4n^2 - (n^2 + 2n + 1)}{4n^2} = \frac{3n^2 - 2n - 1}{4n^2}$ en développant …

Il faudrait alors s'intéresser à la factorisation du polynôme $3n^2 - 2n - 1$ … calcul de Δ …

Nous pouvons éviter ces calculs en factorisant :

$1 - \frac{1}{4}\frac{(n+1)^2}{n^2} = \frac{4n^2 - (n+1)^2}{4n^2} = \frac{(2n + n + 1)(2n - n - 1)}{4n^2} = \frac{(3n+1)(n-1)}{4n^2}$ (*rappel* $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$)

Comme $n \geq 1$, on peut affirmer que $3n + 1 > 0$, $n - 1 \geq 0$ et $4n^2 > 0$, donc $\frac{(3n+1)(n-1)}{4n^2} \geq 0$.

Donc $\frac{1}{4}\frac{(n+1)^2}{n^2} \leq 1$ donc $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1$ donc la suite (U_n) est décroissante.

▶ ***Exercice 9*** Soit (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 1$ et, pour tout entier naturel *n*, $U_{n+1} = 2U_n - 3$.
Montrer par récurrence, que la suite (U_n) est décroissante.

SOLUTION

Considérons la propriété : « $U_{n+1} \leq U_n$ ».

- La propriété est vraie pour *n* = 0, car $U_1 = 2U_0 - 3 = -1$ et $U_0 = 1$ donc $U_1 \leq U_0$.

- Supposons que la propriété soit vraie pour un entier naturel *k*.

  Alors $U_{k+1} \leq U_k$.

  On a alors $2U_{k+1} \leq 2U_k$, donc $2U_{k+1} - 3 \leq 2U_k - 3$ et enfin $U_{k+2} \leq U_{k+1}$.

  La propriété est donc vraie pour *n* = *k* + 1. La propriété est héréditaire.

- CONCLUSION : Pour tout entier naturel *n*, $U_{n+1} \leq U_n$,

  ce qui signifie que la suite (U_n) est décroissante.

▶ ***Exercice 10***

Etudier le sens de variation de la suite (U_n) définie pour tout entier naturel *n* par $U_n = \dfrac{n-1}{n+1}$.

SOLUTION

1^e^ méthode :

$$U_{n+1} - U_n = \frac{n}{n+2} - \frac{n-1}{n+1} = \frac{n(n+1)-(n-1)(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{n^2+n-(n^2-n+2n-2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{2}{(n+2)(n+1)}$$

On a donc $U_{n+1} - U_n > 0$ donc la suite (U_n) est croissante.

2^e^ méthode : $U_n = f(n)$ avec $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$. Etudions *f* sur [0 ; + ∞ [.

f forme $\dfrac{u}{v}$ et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u(x) = x-1$; $v(x) = x+1$; $u'(x) = 1$; $v'(x) = 1$.

$$f'(x) = \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}.$$

On a $f'(x) > 0$ donc f est croissante, donc la suite (U_n) est croissante.

Théorème 1 :

> Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $U_n = f(n)$; Si f est croissante (*ou décroissante*) sur [n_0, + ∞ [,
> alors la suite (U_n) est croissante (*ou décroissante*) à partir du rang n_0.

▶ ***Exercice 11*** Etudier la monotonie des suites suivantes :

1°) (U_n) suite définie par $U_0 = 2$ et pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = U_n^2 - U_n + 1$.

SOLUTION

$U_{n+1} - U_n = U_n^2 - 2U_n + 1 = (U_n - 1)^2 \geq 0$

Donc pour tout entier naturel n, $U_{n+1} \geq U_n$, ce qui signifie que **la suite** (U_n) **est croissante**.

2°) (V_n) suite définie pour tout entier naturel $n \geq 2$ par : $V_n = \dfrac{-n+2}{n-1}$.

SOLUTION

$V_n = f(n)$ avec $f(x) = \dfrac{-x+2}{x-1}$. Etudions f sur [2 ; + ∞ [.

f forme $\dfrac{u}{v}$ et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u(x) = -x+2$; $v(x) = x-1$; $u'(x) = -1$; $v'(x) = 1$.

$f'(x) = \dfrac{-(x-1)-(-x+2)}{(x-1)^2} = \dfrac{-x+1+x-2}{(x-1)^2} = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$. $\quad$ f forme $\dfrac{u}{v}$ et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

On a $f'(x) < 0$ donc f est décroissante, donc **la suite** (V_n) **est décroissante**.

Théorème 1 :

> Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $U_n = f(n)$; Si f est croissante (*ou décroissante*) sur [n_0, + ∞ [,
> alors la suite (U_n) est croissante (*ou décroissante*) à partir du rang n_0.

3°) (W_n) suite définie par $W_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $W_{n+1} = W_n^2 - W_n + 1$.

SOLUTION

$W_{n+1} - W_n = W_n^2 - 2W_n + 1 = (W_n - 1)^2 \geq 0$

Donc pour tout entier naturel n, $W_{n+1} \geq W_n$, ce qui signifie que la suite (W_n) est croissante.

Il s'agit de la même relation de récurrence que pour la suite (U_n) de la 1e question.

Cependant, comme $W_0 = 1$, **la suite** (W_n) **est constante** (égale à 1).

En effet, si $W_n = 1$ on a $W_{n+1} = W_n^2 - W_n + 1 = 0$.