SUITES – 4e partie

► Exercice 14

Etudier la limite éventuelle de la suite (U_n) dans chacun des cas :

a) $U_n = \dfrac{n+1}{n}$ b) $U_n = 3n - 2 + \dfrac{5}{n}$ c) $U_n = \dfrac{n^2}{2n-1}$ d) $U_n = \dfrac{3n^2+1}{2n^2-1}$ e) $U_n = \dfrac{n+1}{2n^2-1}$

► Exercice 15

Soit (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = -2$ et, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = \dfrac{1}{2}U_n + 3$.

1°) Montrer par récurrence que la suite (U_n) est majorée par 6.

2°) Montrer que la suite (U_n) est croissante. Que peut-on en déduire ?

3°) On pose $V_n = U_n - 6$. Montrer que (V_n) est une suite géométrique.

En déduire la limite de la suite (U_n).

Mémo 4 | SUITES - LIMITES - CONVERGENCE, DIVERGENCE

Déf : La suite (U_n) admet une ***limite*** si et seulement si U_n admet une limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Déf : On dit qu'une suite ***converge*** si elle admet une limite finie.
On dit qu'une suite ***diverge*** si elle ne converge pas.

Th :

Suite géométrique	Suite arithmétique
Soit $q \neq 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & si \quad q>1 \\ 1 & si \quad q=1 \\ 0 & si \quad -1<q<1 \\ \text{pas de limite} & si \quad q \leq -1 \end{cases}$	Une suite arithmétique diverge

TECHNIQUES

a) **Opérations sur les limites**

b) **Théorème des Gendarmes**

Th : **Si à partir d'un certain rang,** $x_n \leq U_n \leq y_n$
et si (x_n) **et** (y_n) **convergent vers la même limite** ℓ , **alors** (U_n) **tend vers** ℓ

c) **Technique fonctionnelle** (cas où $U_n = f(n)$) .

Th : **Si** $U_n = f(n)$ **alors la suite** (U_n) **a la même limite que** f **en** $+\infty$

THEOREMES

Th1 Toute suite croissante et majorée converge

Th2 Toute suite décroissante et minorée converge

Th3 Toute suite croissante NON majorée a pour limite $+\infty$

Th4 Toute suite décroissante NON minorée a pour limite $-\infty$

CORRECTION

► *Exercice 14*

Etudier la limite éventuelle de la suite (U_n) dans chacun des cas :

a) $U_n = \dfrac{n+1}{n}$ b) $U_n = 3n-2+\dfrac{5}{n}$ c) $U_n = \dfrac{n^2}{2n-1}$ d) $U_n = \dfrac{3n^2+1}{2n^2-1}$ e) $U_n = \dfrac{n+1}{2n^2-1}$

SOLUTION

a) $U_n = \dfrac{n+1}{n} = 1+\dfrac{1}{n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1}$

b) $U_n = 3n-2+\dfrac{5}{n}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n-2 = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty}$

c) $U_n = \dfrac{n^2}{2n-1}$ On a une FI ; $U_n = \dfrac{n^2}{n\left(2-\dfrac{1}{n}\right)} = \dfrac{n}{2-\dfrac{1}{n}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2-\dfrac{1}{n} = 2$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc par quotient : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty}$

d) $U_n = \dfrac{3n^2+1}{2n^2-1}$ On a une FI ; $U_n = \dfrac{n^2\left(3+\dfrac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(2-\dfrac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{3+\dfrac{1}{n^2}}{2-\dfrac{1}{n^2}}$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 3+\dfrac{1}{n^2} = 3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2-\dfrac{1}{n^2} = 2$

donc par quotient : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \dfrac{3}{2}}$

e) $U_n = \dfrac{n+1}{2n^2-1}$ On a une FI ; $U_n = \dfrac{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{n^2\left(2-\dfrac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{1+\dfrac{1}{n}}{n\left(2-\dfrac{1}{n^2}\right)}$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{1}{n} = 1$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 2-\dfrac{1}{n^2} = 2$. De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(2-\dfrac{1}{n^2}\right) = +\infty$

Enfin par quotient, on a : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0}$

▶ ***Exercice 15***

Soit (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par U_0 = -2 et, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 3$.

1°) Montrer par récurrence que la suite (U_n) est majorée par 6.

2°) Montrer que la suite (U_n) est croissante. Que peut-on en déduire ?

3°) On pose $V_n = U_n - 6$. Montrer que (V_n) est une suite géométrique.

En déduire la limite de la suite (U_n).

SOLUTION

1) Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, on va montrer que $P_n : u_n \leq 6$ est vraie.

Initialisation : on veut montrer que P_n est vraie au rang 0,
c'est-à-dire que $u_0 \leq 6$ or $u_0 = -2$ donc c'est vrai.

Hérédité : on suppose que pour un entier naturel n, P_n est vraie, c'est-à-dire $u_n \leq 6$

On veut montrer que P_{n+1} est vraie, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq 6$.

Or $u_n \leq 6 \Leftrightarrow \frac{1}{2}u_n \leq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}u_n + 3 \leq 6 \Leftrightarrow u_{n+1} \leq 6$

Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n, $\boxed{u_n \leq 6}$

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 3 - u_n = 3 - \frac{1}{2}u_n$

or $u_n \leq 6 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}u_n \geq -3 \Leftrightarrow 3 - \frac{1}{2}u_n \geq 0$

Donc $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et (u_n) est croissante.

(u_n) est donc une suite croissante et majorée par 6 donc elle converge.

Théorème : toute suite croissante et majorée converge.

3) Pour $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{2}u_n + 3 - 6 = \frac{1}{2}(v_n + 6) - 3 = \frac{1}{2}v_n + 3 - 3 = \frac{1}{2}v_n$

Donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 6 = -8$.

Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, la suite (v_n) converge vers 0 ce qui montre que (u_n) converge vers 6.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} U_n = 6}$$

En effet $V_n = q^n V_0$ avec $-1 < q < 1$ et $U_n = V_n + 6$.

Théorème :

Soit $q \neq 0$; $\lim_{n \to +\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & si\ q > 1 \\ 1 & si\ q = 1 \\ 0 & si\ -1 < q < 1 \end{cases}$ et *pas de limite si* $q \leq -1$