

## Mathématiques – Terminale S – 4 heures

**Exercice 1 (4 points)** – Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ . On prendra 1 cm pour unité graphique.

1. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $z^2 - 2z + 2 = 0$ .
2. Soit A, B, C et D les points d'affixes respectives :

$$a = 1 + i \quad ; \quad b = \bar{a} \quad ; \quad c = 2b \quad ; \quad d = 3.$$

Construire une figure et la compléter tout au long de l'exercice.

3. Montrer que les trois points A, B et C appartiennent à un même cercle de centre D dont on précisera le rayon.
4. Calculer  $\frac{c-3}{a-3}$ . En déduire la nature du triangle DAC.
5. On note  $h$  l'homothétie de centre D et de rapport 2. On note  $r$  la rotation de centre D et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .  
On appelle  $C_1$  l'image de C par  $h$  et  $C_2$  l'image de  $C_1$  par  $r$ .

- (a) Max a réalisé quelques calculs avec le logiciel Xcas. Dans la feuille de calcul ci-dessous, à quoi correspond le complexe  $u$  ? le complexe  $v$  ? Expliquer votre réponse à l'aide des expressions complexes des transformations usuelles données dans le cours.

|   |                                           |
|---|-------------------------------------------|
| 1 | <code>a:=1+i; b:=1-i; c:=2*b; d:=3</code> |
|   | ( 1+i, 1-i, 2-2*i, 3 )                    |
| 2 | <code>u:=2*(c-d)+d</code>                 |
|   | 1-4*i                                     |
| 3 | <code>v:=i*(u-d)+d</code>                 |
|   | 7-2*i                                     |
| 4 | <code>(v-u)/(c-a)</code>                  |
|   | 2*i                                       |

- (b) Que peut-on affirmer sur les droites (AC) et  $(C_1C_2)$  à partir des résultats de cette feuille de calcul ? Expliquer.

**Exercice 2 (A ne traiter que par les candidats n'ayant pas suivi la spécialité, 5 points)** – Pour chaque affirmation, vous direz **en justifiant** si elle est vraie ou fausse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

Soit  $\mathcal{P}$  le plan d'équation  $x + 2y - 3z = 10$ , A le point de coordonnées (3; 2; 1) et B le point de coordonnées (2; 1; 1).

1. « Le point A est un point de  $\mathcal{P}$ . »
2. « Le point  $H\left(\frac{37}{14}; \frac{16}{7}; \frac{-13}{14}\right)$  est le projeté orthogonal du point B sur le plan  $\mathcal{P}$ . »
3. « L'équation  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 2z = -4$  est une équation de la sphère  $\mathcal{S}$  de centre B et de rayon AB. »
4. « Le plan  $\mathcal{P}$  est sécant à la sphère  $\mathcal{S}$ . »
5. « Le plan  $\mathcal{Q}$ , plan médiateur du segment [AB], admet l'équation  $x + y + 4 = 0$ . »
6. « Soit C (0; 0; 2). Le plan (ABC) admet une équation de la forme  $x - y + z = d$  où  $d$  est un nombre réel. »

**Exercice 2 (A ne traiter que par les candidats ayant suivi la spécialité, 5 points)** – Pour chaque affirmation, vous direz **en justifiant** si elle est vraie ou fausse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. « Le reste de la division euclidienne de  $2011^{2011}$  par 7 est 2 ».
2. Soient  $a$  et  $b$  deux nombres entiers relatifs non nuls.  
« S'il existe un couple de nombres entiers relatifs  $(u, v)$  tel que  $ua + vb = 3$ , alors  $\text{PGCD}(a, b) = 3$  ».
3. Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 5.  
« L'entier  $n^2 - 3n - 10$  n'est jamais un nombre premier ».
4. « Les solutions de l'équation  $2x + 3y = 1$  d'inconnue  $(x; y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  sont exactement les couples d'entiers de la forme  $(5 + 3k; -3 - 2k)$ , où  $k$  est un entier relatif quelconque. »
5. « Les solutions de l'équation  $2x + 3y = 2$  d'inconnue  $(x; y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  sont exactement les couples d'entiers de la forme  $(10 + 6k; -6 - 4k)$ , où  $k$  est un entier relatif quelconque. »
6. « Il existe exactement deux couples d'entiers naturels  $(a; b)$  tels que  $2 \times \text{ppcm}(a; b) + 3 \times \text{pgcd}(a; b) = 11$ . »

**Exercice 3 (6,5 points) – Partie A**

On considère la fonction  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\varphi(x) = (2 - x)e^x - 1$ .

On admettra le résultat suivant :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ .

1. Déterminer les limites de la fonction  $\varphi$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ .
2. Dériver la fonction  $\varphi$  et étudier le signe de sa dérivée.
3. Étudier les variations de la fonction  $\varphi$ .

4. Prouver que la fonction  $\varphi$  s'annule uniquement en deux valeurs que l'on nommera  $\alpha$  et  $\beta$  (on prendra  $\alpha < \beta$ ).
5. En déduire le signe de la fonction  $\varphi$  sur l'ensemble des réels.
6. À l'aide de la calculatrice, fournir un encadrement d'amplitude  $10^{-2}$  des valeurs  $\alpha$  et  $\beta$ .
7. Montrer que  $e^\alpha = \frac{1}{2-\alpha}$ .

### Partie B

1. Montrer que l'équation  $e^x - x = 0$  n'a pas de solution sur  $\mathbb{R}$  (on pourra étudier la fonction  $x \mapsto e^x - x$ ).
2. En déduire que la fonction  $f: x \mapsto \frac{e^x - 1}{e^x - x}$  peut être définie sur  $\mathbb{R}$ .
3. Calculer la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  puis, à l'aide des résultats de la **partie A**, construire le tableau des variations de  $f$ .
4. Montrer que  $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$ , le nombre  $\alpha$  étant la plus petite des deux valeurs pour lesquelles la fonction  $\varphi$  de la partie A s'annule.

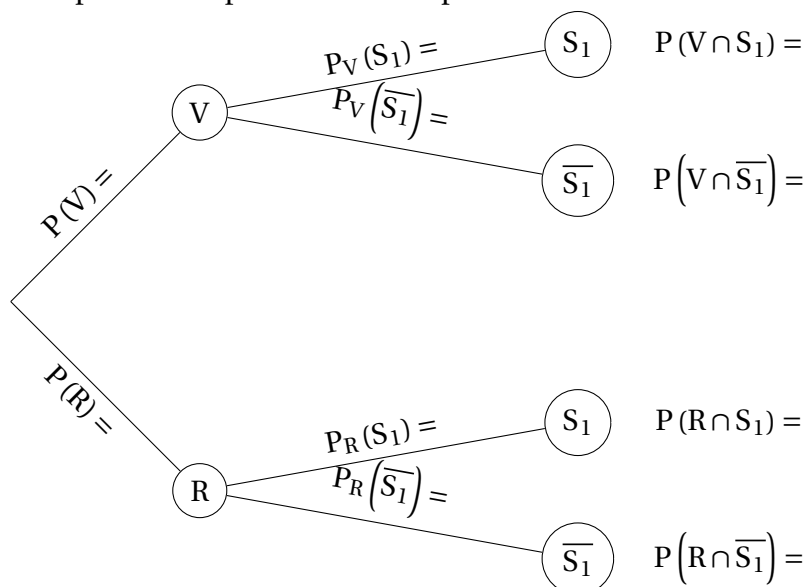
**Exercice 4 (4,5 points)** – Une urne contient trois dés équilibrés. Deux d'entre eux sont verts et possèdent six faces numérotées de 1 à 6. Le troisième est rouge et possède deux faces numérotées 1 et quatre faces numérotées 6.

On prend un dé au hasard dans l'urne et on le lance. On note :

- V l'évènement : « le dé tiré est vert »
- R l'évènement : « le dé tiré est rouge »
- $S_1$  l'évènement : « on obtient 6 au lancer du dé ».

1. On tire au hasard un dé et on effectue un lancer de celui-ci.

(a) Recopier et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.



(b) Calculer la probabilité  $P(S_1)$ .

2. On lance 10 fois de suite le dé rouge. Quelle est la probabilité de l'événement « on obtient uniquement des 6 lors des 10 lancers » ?

3. On tire au hasard un dé de l'urne. On lance ensuite ce dé  $n$  fois de suite. On note  $S_n$  l'évènement : « on obtient 6 à chacun des  $n$  lancers ».

(a) Démontrer que :

$$P(S_n) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

(b) Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note  $p_n$  la probabilité d'avoir tiré le dé rouge, sachant qu'on a obtenu le numéro 6 à chacun des  $n$  lancers.

Démontrer que :

$$p_n = \frac{1}{2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}.$$

(c) i. Justifier que la suite  $(p_n)$  est strictement croissante.

ii. A l'aide de votre calculatrice, déterminer le plus petit entier  $n_0$  tel que  $p_n \geq 0,999$  pour tout  $n \geq n_0$ .

iii. On a écrit sur calculatrice un programme prenant en entrée un réel  $B \in ]0; 1[$  et fournissant en sortie le plus petit entier  $n$  tel que  $p_n > B$ . Max a entré un tel programme dans sa calculatrice. Mais le test de la boucle « Tant que » a été effacé. Restituer le.

|            |                                                                                                                                 |
|------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Entrée     | un réel $B \in ]0; 1[$                                                                                                          |
| Traitement | $0 \rightarrow n$<br>$1/3 \rightarrow p$<br>TantQue ...<br>$n + 1 \rightarrow n$<br>$1/(1 + 2/4^n) \rightarrow p$<br>FinTantQue |
| Sortie     | Afficher $n$                                                                                                                    |