**Exercice ( pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité )**

1) Question de cours :

Théorème de Bézout : $a$ et $b$ désignent deux entiers non nuls.

$a$ et $b$ sont premiers entre eux si et seulement s'il existe des entiers relatifs $u$ et $v$ tels que $au+bv=1$ .

Enoncer le théorème de Gauss et démontrer ce théorème en utilisant le théorème de Bézout.

2) a) Démontrer que pour tout entier naturel $n$ , $2^{3n} \equiv 1$ [mod 7]

b) Déterminer le reste de la division euclidienne de $2011^{2013}$ par 7

3) Soit $n$ un entier naturel. On considère les entiers $a=3n+1$ et $b=2n+3$

Montrer que $PGCD(a,b)=7 \Leftrightarrow n\equiv 2[7]$

4) Déterminer l'ensemble de tous les couples $(x,y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation $(E): 11x-5y=14$

5) On considère l'algorithme suivant où $Ent(\frac{A}{N})$ désigne la partie entière de $\frac{A}{N}$ .

> $A$ et $N$ sont des entiers naturels
>
> Saisir $A$
>
> $N$ prend la valeur 1
>
> Tant que $N \leqslant \sqrt{(A)}$
>
> Si $\frac{A}{N} - Ent\left(\frac{A}{N}\right)=0$ alors Afficher $N$ et $\frac{A}{N}$
>
> Fin Si
>
> $N$ prend la valeur $N+1$
>
> Fin Tant que

a) Quels résultats successifs affiche cet algorithme si $A=12$ ?

b) Que donne cet algorithme dans le cas général ?

**Correction exercice de spécialité**

1) Théorème de Gauss : $a,b$ et $c$ désignent 3 entiers non nuls.

   Si $a$ divise le produit $bc$ et si $a$ et $b$ sont premiers entre eux, alors $a$ divise $c$.

   Démonstration :

   Si $a$ et $b$ sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bezout, il existe des entiers relatifs $u$ et $v$ tels que $au+bv=1$.

   On en déduit par multiplication par $c$ : $auc+bvc=c$

   $a$ divise évidemment $auc$ et si par hypothèse, $a$ divise $bc$ alors a divise aussi $bvc$

   $a$ divisant à la fois $auc$ et $bvc$, $a$ divise aussi leur somme $auc+bvc=c$

2) a) $2^3=8$ donc $2^3\equiv 1[7]$ donc $(2^3)^n\equiv 1^n[7]$ donc $2^{3n}\equiv 1[7]$

   b) 2001≡2[7] car $2011-2=2009$ est multiple de 7 donc $2011^{2013}\equiv 2^{2013}[7]$

   Or, 2013 est un multiple de 3 donc s'écrit sous la forme $3n$ avec $n=671$

   On en déduit que $2011^{2013}\equiv 2^{3n}[7]$ donc $2011^{2013}\equiv 1[7]$

   Le reste de la division euclidienne de $2011^{2013}$ par 7 est donc 1.

3) Soit $d$ un entier positif non nul.

   Si $d$ divise $a$ et $b$ alors $d$ divise $3b-2a=3(2n+3)-2(3n+1)=6n+9-6n-2=7$ donc $d$ peut valoir 1 ou 7.

   Si $n\equiv 2[7]$ alors $2n\equiv 4[7]$ et $2n+3\equiv 0[7]$.

   Si $n\equiv 2[7]$ alors $3n\equiv 6[7]$ et $3n+1\equiv 0[7]$.

   Donc, si $n\equiv 2[7]$ alors $a$ et $b$ sont deux multiples de 7 donc leur plus grand diviseur commun est alors 7. Dans les autres cas, $a$ n'est jamais multiple de 7 :

   si $n\equiv 0[7]$ alors $a\equiv 3[7]$, si $n\equiv 1[7]$ alors $a\equiv 5[7]$, si $n\equiv 3[7]$ alors $a\equiv 2[7]$

   si $n\equiv 4[7]$ alors $a\equiv 4[7]$, si $n\equiv 5[7]$ alors $a\equiv 6[7]$, si $n\equiv 6[7]$ alors $a\equiv 1[7]$

   Dans les autres cas, $PGCD(a,b)=1$ car 1 est le seul diviseur commun à $a$ et à $b$.

4) $(E): 11x-5y=14$ . Cette équation admet des solutions, 11 et 5 étant premiers entre eux

   Le couple $(x_{0,}y_0)=(4,6)$ est une de ces solutions

   Si $(x,y)$ est solution de $(E)$ alors $11x-5y=14$

   de plus : $11x_0-5y_0=14$

   Et par soustraction, on déduit que : $11(x-x_0)-5(y-y_0)=0$ donc $11(x-x_0)=5(y-y_0)$

   11 divise $5(y-y_0)$ et 11 est premier avec 5 donc 11 divise $y-y_0$ d'après le théorème de Gauss, donc $y-y_0=11k$ avec $k$ entier relatif, soit $y=11k+$

   On en déduit : $11(x-x_0)=5\times 11k$ , soit $x-x_0=5k$ donc $x=5k+4$

   On a montré que si $(x,y)$ est solution de $(E)$ alors $(x,y)=(5k+4,11k+6)$, $k\in\mathbb{Z}$

   Réciproquement : Si $(x,y)=(5k+4,11k+6)$ alors

$11x-5y=11(5k+4)-5(11k+6)=55k+44-55k-30=44-30=14$

donc $(x, y)$ est solution de $(E)$

<u>Conclusion</u> : L'ensemble des couples $(x, y)$ d'entiers relatifs tels que $11x-5y=14$ est l'ensemble des couples de la forme $(5k+4, 11k+6)$

5) a) Si $A=12$ , on a à l'affichage dans l'ordre 1,12,2,6,3,4.

   b) Dans le cas général, on a à l'affichage la liste des diviseurs de $A$ .