

>>> Calculatrice autorisée. <<<

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction
interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats auront à traiter 4 exercices. (les énoncés des exercices 1 et 2 seront rendus avec la copie).

L'exercice n° 4 est différent selon que le candidat aura suivi l'enseignement de spécialité ou pas.

Exercice 1 (5 points) Commun à tous les candidats

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Pour tout entier naturel n , on note A_n le point d'affixe z_n défini par : $z_0 = 1$ et $z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)z_n$.

On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel n .

1. Donner la forme exponentielle du nombre complexe $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$.

2. a. Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

b. En déduire l'expression de r_n en fonction de n .

c. Que dire de la longueur OA_n lorsque n tend vers $+\infty$?

3. Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme donné ci-dessous, afin qu'il affiche la plus petite valeur de n telle que $R_n \leq 0,01$.

4. a. Démontrer que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1} .

b. On admet que $z_n = r_n e^{i \frac{n\pi}{6}}$. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est un point de l'axe des ordonnées.

c. Compléter la figure donnée sur la feuille en annexe, représentant les points A_6 , A_7 , A_8 et A_9 .

Variables	n entier naturel R réel
Initialisation	R prend la valeur 1 n prend la valeur 0
Traitement	Tant que (1) n prend la valeur (2) R prend la valeur (3) Fin tant que
Sortie	Afficher n

+++++

Exercice 2 (5 points) Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(x) = e^x - x - 1$.

- 1) Étudier les variations de la fonction g .
- 2) Déterminer, alors, le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
- 3) En déduire que pour tout x de $[0, +\infty[$, $e^x - x > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par : $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$. On admet que f est strictement croissante sur $[0, 1]$.

La courbe (C) représentative de la fonction f , dans le plan muni d'un repère orthonormal, est donnée sur la feuille annexe. Cette annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

- 1) Montrer que pour tout x de $[0, 1]$, $f(x) - x = \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$.
- 2) Soit (D) la droite d'équation $y = x$.
Étudier la position relative de la droite (D) et de la courbe (C) sur $[0, 1]$.

Partie C

On considère la suite (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ \text{pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

- 1) Construire sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite en laissant apparents les traits de construction.
- 2) Montrer que pour tout entier naturel n , $\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.
- 3) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
On admet que la limite de cette suite est solution de l'équation $f(x) = x$.

+++++

Exercice 3 : (5 points) Commun à tous les candidats

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

- 1) Soient A le point d'affixe $2 - 5i$ et B le point d'affixe $7 - 3i$.

Proposition 1 : Le triangle OAB est rectangle isocèle.

- 2) Soit (Δ) l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z - i| = |z + 2i|$.

Proposition 2 : (Δ) est une droite parallèle à l'axe des réels.

- 3) Soit $z = 3 + i\sqrt{3}$.

Proposition 3 : Pour tout entier naturel n non nul, z^{3n} est imaginaire pur.

- 4) Soit z un nombre complexe non nul.

Proposition 4 : Si $\frac{\pi}{2}$ est un argument de z alors $|i + z| = 1 + |z|$.

- 5) Soit z un nombre complexe non nul.

Proposition 5 : Si le module de z est égal à 1 alors $z^2 + \frac{1}{z^2}$ est un nombre réel.

+++++

Exercice 4 : (5 points) Réserve aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité de mathématiques

Le secteur de production d'une entreprise est composé de 3 catégories de personnel :

- les ingénieurs ;
- les opérateurs de production;
- les agents de maintenance.

Il y a 8 % d'ingénieurs et 82 % d'opérateurs de production. Les femmes représentent 50 % des ingénieurs, 25 % des agents de maintenance et 60 % des opérateurs de production.

I. Partie A

Dans cette partie, on interroge au hasard un membre du personnel de cette entreprise.

- On note :
- M l'évènement : « le personnel interrogé est un agent de maintenance » ;
 - O l'évènement : « le personnel interrogé est un opérateur de production » ;
 - I l'évènement : « le personnel interrogé est un ingénieur » ;
 - F l'évènement : « le personnel interrogé est une femme ».

1. Construire un arbre pondéré correspondant aux données.

2. Déterminer la probabilité d'interroger :

- a. un agent de maintenance ;
- b. une femme agent de maintenance ;
- c. une femme,

3. Les événements I et F sont-ils indépendants ? *Justifier la réponse.*

II. Partie B

Le service de maintenance effectue l'entretien des machines, mais il est appelé aussi à intervenir en cas de panne.

Pour cela une alarme est prévue ; des études ont montré que sur une journée :

- la probabilité qu'il n'y ait pas de panne et que l'alarme se déclenche est égale à 0,002 ;
- la probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme ne se déclenche pas est égale à 0,003 ;
- la probabilité qu'une panne se produise est égale à 0,04.

On note :

- A l'évènement : « l'alarme se déclenche » ;

- B l'évènement : « une panne se produit » ;

1. Démontrer que la probabilité qu'une panne survienne et que l'alarme se déclenche est égale à 0,037.

2. Calculer la probabilité que l'alarme se déclenche.

3. Calculer la probabilité qu'il y ait une panne sachant que l'alarme se déclenche. Le résultat sera donné à 10^{-3} près.

III. Partie C

Cette entreprise travaille non stop les sept jours de la semaine.

On admet que l'alarme se déclenche chaque jour, de manière indépendante, avec une probabilité égale à 0,039.

Calculer la probabilité que l'alarme se déclenche au moins une fois au cours de la semaine.

+++++

Exercice 4 : (5 points) Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité Mathématiques

Faire cet exercice sur une feuille séparée. Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Un sac contient 10 boules numérotées de 1 à 10, indiscernables au toucher.

On tire simultanément deux boules du sac : on a 90 tirages différents possibles, supposés tous équiprobables.

1) On note a et b les numéros obtenus lors d'un tirage, a étant le plus petit des deux.

Pour chaque paire $\{a, b\}$, on note $d = \text{PGCD}(a, b)$.

Compléter le tableau suivant donnant les valeurs de d suivant les valeurs de a et b (sauf les parties grisées)

		b								
		2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	1									
	2									
	3									
	4									
	5									
	6									
	7									
	8									
	9									
	10									

- 2) Récapituler dans un tableau les différentes valeurs de d et les probabilités correspondantes.
- 3) En justifiant votre réponse, donner la probabilité de l'événement :
Il n'existe aucun couple (x, y) d'entiers relatifs tels que : $ax + by = 1$
- 4) Lors de l'épreuve « tirer simultanément deux boules du sac », on considère comme succès l'événement: « $\text{PGCD}(a, b) = 1$ »
- On répète 6 fois cette épreuve, en remettant les boules tirées avant de procéder au tirage suivant, les tirages successifs étant ainsi indépendants.
- On note X la variable aléatoire égale au nombre de succès lors de ces 6 répétitions.
- Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ?
- Calculer $p(X \geq 1)$ et écrire une phrase expliquant à quoi correspond cette probabilité.

Partie B

- 1) Donner l'énoncé du théorème de Gauss
- 2) En utilisant le théorème de Gauss, montrer que : a, p, q étant 3 entiers naturels non nuls,
si $a \equiv 0 [p]$ et si $a \equiv 0 [q]$ alors $a \equiv 0 [pq]$.

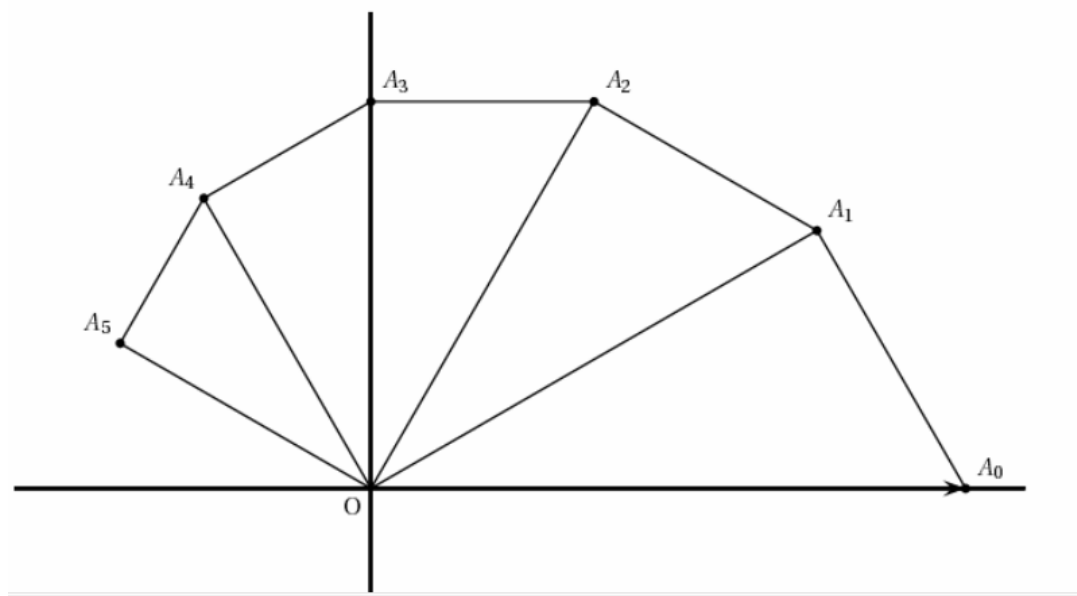
+++++

NOM :

Feuille annexe à compléter et à rendre avec la copie

Classe :

Exercice 1



Exercice 2:

