Exercice 1

1. $\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

2. a. $z_1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$z_2 = 1 - 2 = -1$

$z_3 = 1 + 1 = 2 = z_0$

On retrouve alors $z_4 = \frac{1}{2}, z_5 = -1$ et $z_6 = 2$.

b. $z_1 = 1 - \frac{1}{i} = 1 + i$ en utilisant 1.

$z_2 = 1 - \frac{1}{1+i} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ en utilisant 1.

Et donc $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1+i}{2}$.

$z_3 = 1 - \frac{2}{1+i} = 1 - 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right)$ en utilisant 1.

Et donc $z_3 = i$.

On retrouve alors $z_4 = 1 + i, z_5 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ et

$z_6 = i$.

c. Conjecture : $\forall n \in \mathbb{N}, z_{3n} = z_0$.

Prouvons cette conjecture en utilisant un raisonnement par récurrence.

Initialisation : Posons $n = 0$.

$z_{3 \times 0} = z_0$: la propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : Soit $n \geq 0$.

Supposons que $z_{3n} = z_0$.

Démontrons qu'alors $z_{3(n+1)} = z_0$, c'est-à-dire

que $z_{3n+3} = z_0$

$z_{3n} = z_0$, donc $z_{3n+1} = 1 - \frac{1}{z_0} = \frac{z_0-1}{z_0}$ (car $z_0 \neq 0$).

Alors $z_{3n+2} = 1 - \frac{z_0}{z_0-1} = \frac{-1}{z_0-1}$ (car $z_0 \neq 1$).

Et donc $z_{3n+3} = 1 + (z_0 - 1) = z_0$.

La propriété est héréditaire.

Conclusion : On a démontré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, z_{3n} = z_0$.

3. $z_{2016} = z_{3 \times 672} = z_0$, d'après 2.c.

Donc $z_{2016} = 1 + i$.

4. $z_0 = z_1 \Leftrightarrow z_0 = 1 - \frac{1}{z_0}$

$\Leftrightarrow z_0^2 = z_0 - 1$, en multipliant par z_0

$\Leftrightarrow z_0^2 - z_0 + 1 = 0$

$\Delta = -3 < 0$: $z_{0,1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, z_{0,2} = \overline{z_{0,1}} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$

Il existe donc deux valeurs de z_0 pour lesquelles

$z_0 = z_1$: ce sont $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

Dans ce cas $z_0 = z_1 = z_2 = z_3 = \dots$: la suite (z_n) est constante (ou stationnaire).

Exercice 2

Partie A

1. La vitesse d'apparition d'alcool dans le sang $C'(t)$ est égale au coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse t . Graphiquement, on remarque que ce coefficient directeur est maximal pour $t = 0$: la vitesse d'apparition d'alcool dans le sang est donc maximale au moment où la personne en ingère.

2. Par comparaison des coefficients directeurs des tangentes à l'origine :

$C_1'(0) > C_2'(0)$.

P_1 subit donc plus vite les effets de l'alcool que P_2 . Par conséquent P_2 est la personne la plus corpuente.

3. a. $f'(t) = Ae^{-t} + At \times (-te^{-t})$
 $= A(1-t)e^{-t}$

Donc $f'(0) = A$.

b. FAUX : Plus A est grand, plus $f'(0)$ (vitesse d'apparition d'alcool dans le sang à $t = 0$) est grande, et donc moins la personne est corpuente.

Partie B

1. En posant $A = 2$ on trouve :

$f'(t) = 2(1-t)e^{-t}$

Or $\forall t \in \mathbb{R}, 2e^{-t} > 0$, donc $f'(t)$ est du même signe que $1-t$.

t	0	1	$+\infty$
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	0	$\nearrow 2e^{-1}$	$\searrow$

2. La concentration d'alcool dans le sang de Paul est maximale à $t = 1$, soit au bout d'1 heure. Cette concentration vaut alors $2e^{-1} \approx 0,74 \text{ g. L}^{-1}$.

3. On rappelle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$.

Or $f(t) = 2 \frac{t}{e^t}$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$.

Interprétation : Si on laisse s'écouler un temps suffisamment long après avoir ingurgité de l'alcool, la concentration en alcool dans le sang redevient « très proche » de 0 (plus précisément,

elle prend des valeurs aussi proches de 0 qu'on veut, à condition d'attendre un temps suffisamment long).

4. a. f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $[0; 1]$. De plus $f(0) = 0 < 0,2$ et $f(1) = 2e^{-1} > 0,2$, donc $0,2$ est compris entre $f(0)$ et $f(1)$. D'après le corollaire du théorème des valeurs

intermédiaires, il existe alors un unique réel $t_1 \in [0; 1]$ tel que $f(t_1) = 0,2$.

b. $f(3,57) \approx 0,201 > 0,2$ et $f(3,58) \approx 0,199 < 0,2$, donc $3,57 < t_2 < 3,58$ Paul devra attendre 3 h 34 min avant de pouvoir prendre le volant en toute légalité.

Exercice 3

1. Soit f' la fonction dérivée de f . On a $f'(\frac{\pi}{4}) = 0$

Explication (non attendue dans la copie) : Les réponses 1 et 3 peuvent être facilement éliminées en traçant la courbe de la fonction f à l'écran de la calculatrice, avec des paramètres d'affichage adaptés.

$f'(x) = e^{-x}(\cos x - \sin x)$, donc

$$f'(\frac{\pi}{4}) = e^{-\frac{\pi}{4}}(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}) = 0.$$

Et enfin $F'(x) = -2 \cos x e^{-x} \neq f(x)$

2. La droite (AB) admet comme représentation

$$\text{paramétrique} \begin{cases} x = -4 - t \\ y = 3 + \frac{1}{2}t \\ z = -1 \end{cases}$$

Explication : Il est facile de vérifier que la droite qui admet cette représentation paramétrique passe par A (poser $t = -4$) et B (poser $t = -2$)

3. 0,24

$$\begin{aligned} \text{Explication : } P(B) &= P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) \\ &= 0,6 \times 0,2 + 0,4 \times 0,3 \\ &= 0,24 \end{aligned}$$

$$4. P_{\bar{B}}(A) = \frac{12}{19}$$

Explication : La réponse n°1 est éliminée en remarquant que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 + 0,24 - 0,12 = 0,72$.

La réponse n°2 est éliminée car $P(B) = 0,24$ et $P_A(B) = 0,2$, donc $P_A(B) \neq P(B)$.

La réponse n°3 est éliminée car $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,7 \times 0,3 = 0,21$.

$$\text{Enfin, } P_{\bar{B}}(A) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0,6 \times 0,8}{0,76} = \frac{48}{76} = \frac{12}{19}$$

Exercice 4 (Non Spécialité)

Partie A

p	k	u
2	0	5
2	1	$0,5 \times 5 + 0,5 \times 0 - 1,5 = 1$
2	2	$0,5 \times 1 + 0,5 \times 1 - 1,5 = -0,5$

Le nombre affiché en sortie est $-0,5$.

Partie B

1. L'instruction « Afficher u » doit être placée sur la ligne précédant le « Fin de pour ».

2. La suite u_n n'est pas décroissante, car $u_3 < u_4$.

3. **Initialisation** : Posons $n = 3$.

$u_4 = -0,375$ et $u_3 = -0,75$, donc $u_4 > u_3$: la propriété est vraie au rang 3.

Hérédité : Soit $n \geq 3$.

Supposons que $u_{n+1} > u_n$.

Démontrons qu'alors $u_{n+2} > u_{n+1}$.

On a supposé que $u_{n+1} > u_n$.

Donc $0,5u_{n+1} > 0,5u_n$ (car $0,5 > 0$).

Comme $0,5(n+1) > 0,5n$, on en déduit que $0,5u_{n+1} + 0,5(n+1) > 0,5u_n + 0,5n$.

Donc $0,5u_{n+1} + 0,5(n+1) + 0,5 > 0,5u_n + 0,5n + 0,5$

Et finalement $u_{n+2} > u_{n+1}$.

La propriété est héréditaire.

Conclusion : On a démontré par récurrence que $\forall n \geq 3, u_{n+1} > u_n$.

La suite (u_n) est donc une suite croissante à partir du rang 3.

$$\begin{aligned} 4. v_{n+1} &= 0,1u_{n+1} - 0,1(n+1) + 0,5 \\ &= 0,1(0,5u_n + 0,5n - 1,5) - 0,1n + 0,4 \\ &= 0,05u_n - 0,05n + 0,25 \\ &= 0,5(0,1u_n - 0,1n + 0,5) \\ &= 0,5v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc bien une suite géométrique, de raison 0,5, et de premier terme $v_0 = 0,1u_0 - 0,1 \times 0 + 0,5 = 1$.

Donc $\forall n \geq 0, v_n = 0,5^n$.

5. $v_n = 0,1u_n - 0,1n + 0,5$
On en déduit que $0,1u_n = v_n + 0,1n - 0,5$.

Et donc $u_n = 10v_n + n - 5$.

Avec le résultat du 4, on trouve :

$$\forall n \geq 0, u_n = 10 \times 0,5^n + n - 5$$

6. $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = 0$ car $-1 < 0,5 < 1$.

De plus $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - 5 = +\infty$.

Donc, par somme et produit, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 4 (Spécialité)

1. $u_2 - u_1 = 0,9(u_1 - u_0)$

Donc $u_2 = 5,1 + 0,9 \times 0,1 = 5,19$.

2. a. On remarque tout d'abord que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$u_{n+2} = u_{n+1} + 0,9(u_{n+1} - u_n)$, ce qui entraîne :

$$u_{n+2} = 1,9u_{n+1} - 0,9u_n$$

$$V_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$AV_n = \begin{pmatrix} 1,9u_{n+1} - 0,9u_n \\ 1u_{n+1} + 0u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$$

On a donc vérifié que $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = AV_n$.

b. $P^{-1} = \begin{pmatrix} -10 & 10 \\ 10 & -9 \end{pmatrix}$

$$P^{-1}A = \begin{pmatrix} -10 & 10 \\ 10 & -9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1,9 & -0,9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -10 \times 1,9 + 10 \times 1 & -10 \times (-0,9) + 10 \times 0 \\ 10 \times 1,9 - 9 \times 1 & 10 \times (-0,9) - 9 \times 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Donc } P^{-1}A = \begin{pmatrix} -9 & 9 \\ 10 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\text{Alors } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -9 & 9 \\ 10 & -9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,9 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -9 \times 0,9 + 9 \times 1 & -9 \times 1 + 9 \times 1 \\ 10 \times 0,9 - 9 \times 1 & 10 \times 1 - 9 \times 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Finalement : } D = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c. **Initialisation** : Posons $n = 0$.

$$A^0 = I_2 \text{ et } PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2.$$

$$\text{Donc } A^0 = PD^0P^{-1}.$$

La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : Soit $n \geq 0$.

Supposons que $A^n = PD^nP^{-1}$.

Démontrons qu'alors $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$.

$$A^{n+1} = A^nA$$

$$= (PD^nP^{-1})A \text{ d'après l'hypothèse de}$$

récurrence

Or $D = P^{-1}AP$, donc $PDP^{-1} = A$.

$$\text{Alors } A^{n+1} = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1})$$

$$= PD^n(P^{-1}P)DP^{-1} \text{ par associativité}$$

$$= PD^nI_2DP^{-1}$$

$$= P(D^nD)P^{-1} \text{ par associativité}$$

$$= PD^{n+1}P^{-1}$$

La propriété est héréditaire.

Conclusion : On a démontré par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = PD^nP^{-1}.$$

d. $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = A^nV_0 = A^n \begin{pmatrix} 5,1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Or u_n est le coefficient de la deuxième ligne et de la première colonne de V_n .

$$\text{Donc } u_n = (-10 \times 0,9^n + 10) \times 5,1$$

$$+ (10 \times 0,9^n - 9) \times 5$$

$$= -51 \times 0,9^n + 51 + 50 \times 0,9^n - 45$$

$$\text{Finalement, } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = 6 - 0,9^n.$$

3. $u_{10} = 6 - 0,9^{10} \approx 5,651$

Selon ce modèle, la colonie devrait compter 5651 fourmis au bout du 10^e jour.

4. $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,9^n = 0$ car $-1 < 0,9 < 1$.

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 6.$$

Les jours passant, la taille de la colonie devrait se stabiliser autour de 6000 fourmis.