BAC BLANC 2017

Discipline	:	Mathématiques
Série	:	S
Durée de l'épreuve	:	4 heures

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5

Consignes :
— L'utilisation de la calculatrice est autorisée.
— L'usage des formulaires de mathématiques n'est pas autorisé.
— La qualité de la réaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront aussi dans l'appréciation de la copie.

EXERCICE 1 **5 POINTS**
Commun à tous les candidats

On considère les nombres complexes z_n définis pour tout entier $n \geqslant 0$ par la donnée de z_0, où z_0 est différent de 0 et de 1, et la relation de récurrence :

$$z_{n+1} = 1 - \frac{1}{z_n}.$$

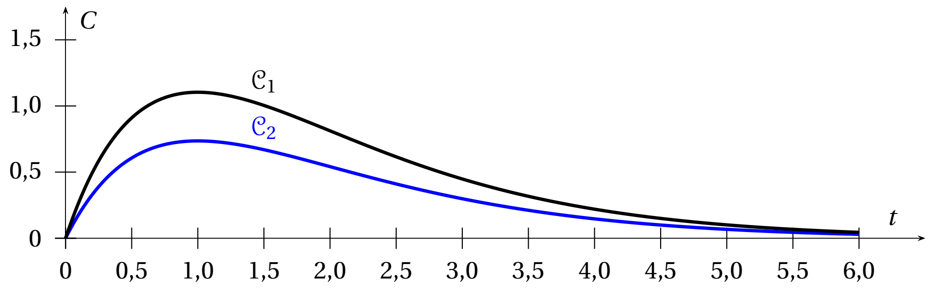
1. Mettre sous forme algébrique les nombres compexes $\frac{1}{i}$ et $\frac{1}{1+i}$.
2. a. Dans cette question, on suppose que $z_0 = 2$. Déterminer les nombres z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6
   b. Dans cette question, on suppose que $z_0 = \mathrm{i}$. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6.
   c. Dans cette question on revient au cas général où z_0 est un complexe donné. Que peut-on conjecturer pour les valeurs prises par z_{3n} selon les valeurs de l'entier naturel n?
   Prouver cette conjecture.
3. Déterminer z_{2016} dans le cas où $z_0 = 1 + \mathrm{i}$.
4. Existe-t-il des valeurs de z_0 tel que $z_0 = z_1$? Que peut-on dire de la suite (z_n) dans ce cas ?

EXERCICE 2 **6 points**
Commun à tous les candidats

Partie A
Voici deux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ qui donnent pour deux personnes P_1 et P_2 de corpulences différentes la concentration C d'alcool dans le sang (taux d'alcoolémie) en fonction du temps t après ingestion de la même quantité d'alcool. L'instant $t = 0$ correspond au moment où les deux individus ingèrent l'alcool.

C est exprimée en gramme par litre et t en heure.

Définition : La corpulence est le nom scientifique correspondant au volume du corps



1. La fonction C est définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et on note C' sa fonction dérivée. À un instant t positif ou nul, la vitesse d'apparition d'alcool dans le sang est donnée par $C'(t)$.
À quel instant cette vitesse est-elle maximale ?

2. *On dit souvent qu'une personne de faible corpulence subit plus vite les effets de l'alcool.*
Sur le graphique précédent, identifier la courbe correspondant à la personne la plus corpulente. Justifier le choix effectué.

3. Une personne à jeun absorbe de l'alcool. On admet que la concentration C d'alcool dans son sang peut être modélisée par la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(t) = At\mathrm{e}^{-t}$$

où A est une constante positive qui dépend de la corpulence et de la quantité d'alcool absorbée.

a. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Déterminer $f'(0)$.

b. L'affirmation suivante est-elle vraie ?
« À quantité d'alcool absorbée égale, plus A est grand, plus la personne est corpulente. »

Partie B - Un cas particulier

Paul, étudiant de 19 ans de corpulence moyenne et jeune conducteur, boit deux verres de rhum. La concentration C d'alcool dans son sang est modélisée en fonction du temps t, exprimé en heure, par la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(t) = 2t\mathrm{e}^{-t}.$$

1. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

2. À quel instant la concentration d'alcool dans le sang de Paul est-elle maximale ? Quelle est alors sa valeur ? Arrondir à 10^{-2} près.

3. Rappeler la limite de $\dfrac{\mathrm{e}^t}{t}$ lorsque t tend vers $+\infty$ et en déduire celle de $f(t)$ en $+\infty$.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

4. Paul veut savoir au bout de combien de temps il peut prendre sa voiture pour rentrer chez lui. Le trajet dure 30 minutes. On rappelle que la législation autorise une concentration maximale d'alcool dans le sang de $0,2$ g.L^{-1} pour un jeune conducteur.

a. Démontrer qu'il existe un unique réel t_1 appartenant à $[0 ; 1]$ tel que $f(t_1) = 0,2$.
On admet qu'il existe de même un unique réel t_2 dans $]1 ; +\infty[$ tel que $f(t_2) = 0,2$.

b. Quelle durée minimale Paul doit-il attendre avant de pouvoir prendre le volant en toute légalité ?
Donner le résultat arrondi à la minute la plus proche.

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

Pour chacune des quatre questions, une seule des quatre propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et recopiera la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Il sera attribué un point si la réponse est exacte, zéro sinon.

1. Soit la fonction f définie et dérivable pour tout nombre réel x par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\sin x.$$

- La fonction f est décroissante sur l'intervalle $\left]\frac{\pi}{4}\ ;\ +\infty\right[$.
- Soit f' la fonction dérivée de f. On a $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.
- La fonction f est positive sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
- Soit F la fonction définie, pour tout réel x, par $F(x) = \mathrm{e}^{-x}(\cos x - \sin x)$.
  La fonction f est la dérivée de la fonction F.

2. Dans l'espace muni d'un repère (O ; I,J,K) on considère :

— les points $A(0\ ;\ 1\ ;\ -1)$ et $B(-2\ ;\ 2\ ;\ -1)$.

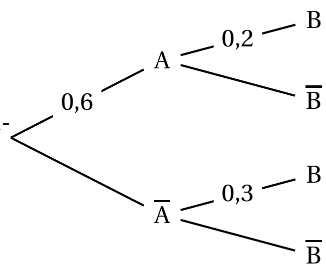
— la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{rcr} x &=& -2+t \\ y &=& 1+t \\ z &=& -1-t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}.$$

- Les droites (AB) et $\mathcal{D}$ sont sécantes.
- Les droites (AB) et $\mathcal{D}$ sont parallèles.
- La droite $\mathcal{D}$ contient le point $(1\ ;\ 1\ ;\ -1)$.
- La droite (AB) admet comme représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{rcr} x &=& -4-t \\ y &=& 3+\frac{1}{2}t \\ z &=& -1 \end{array}\right., t \in \mathbb{R}.$$

3. On considère l'arbre de probabilités ci-contre :



La probabilité de l'événement B est :

- 0,12
- 0,2
- 0,24
- 0,5

4. Avec l'arbre de la question précédente, on peut dire que :

- $P(A \cup B) = 0{,}84$.
- Les événements A et B sont indépendants.
- $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}7$.
- $P_{\overline{B}}(A) = \frac{12}{19}$.

EXERCICE 4 **5 POINTS**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	k et p sont des entiers naturels
	u est un réel
Entrée :	Demander la valeur de p
Traitement :	Affecter à u la valeur 5
	Pour k variant de 1 à p
	Affecter à u la valeur $0,5u+0,5(k-1)-1,5$
	Fin de pour
Sortie :	Afficher u

Faire fonctionner cet algorithme pour $p = 2$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.

Quel nombre obtient-on en sortie ?

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n par

$$u_{n+1} = 0,5u_n + 0,5n - 1,5.$$

1. Modifier l'algorithme de la première partie pour obtenir en sortie toutes les valeurs de u_n pour n variant de 1 à p.
2. À l'aide de l'algorithme modifié, après avoir saisi $p = 4$, on obtient les résultats suivants :

n	1	2	3	4
u_n	1	$-0,5$	$-0,75$	$-0,375$

   Peut-on affirmer, à partir de ces résultats, que la suite (u_n) est décroissante ? Justifier.
3. Démontrer par récurrence que l'on a $u_{n+1} > u_n$ pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3.
   Que peut-on en déduire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?
4. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = 0,1u_n - 0,1n + 0,5$.
   Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,5 et exprimer alors v_n en fonction de n.
5. En déduire que, pour tout entier naturel n,
$$u_n = 10 \times 0,5^n + n - 5.$$
6. Déterminer alors la limite de la suite (u_n).

EXERCICE 4 **5 POINTS**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité.

On observe la taille d'une colonie de fourmis tous les jours.

Pour tout entier naturel n non nul, on note u_n le nombre de fourmis, exprimé en milliers. dans cette population au bout du n-ième jour.

Au début de l'étude la colonie compte 5 000 fourmis et au bout d'un jour elle compte 5 100 fourmis. Ainsi, on a $u_0 = 5$ et $u_1 = 5,1$.

On suppose que l'accroissement de la taille de la colonie d'un jour sur l'autre diminue de 10 % chaque jour.

En d'autres termes. pour tout entier naturel n,

$$u_{n+2} - u_{n+1} = 0,9\left(u_{n+1} - u_n\right).$$

1. Démontrer, dans ces conditions, que $u_2 = 5,19$.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $V_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1,9 & -0,9 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   a. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $V_{n+1} = AV_n$.
   On admet alors que, pour tout entier naturel n, $V_n = A^n V_0$.

   b. On pose $P = \begin{pmatrix} 0,9 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. On admet que la matrice P est inversible.
   À l'aide de la calculatrice, déterminer la matrice P^{-1}.
   En détaillant les calculs, déterminer la matrice D définie par $D = P^{-1}AP$.

   c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a
   $A^n = PD^nP^{-1}$.
   Pour tout entier naturel n, on admet que

$$A^n = \begin{pmatrix} -10 \times 0,9^{n+1} + 10 & 10 \times 0,9^{n+1} - 9 \\ -10 \times 0,9^n + 10 & 10 \times 0,9^n - 9 \end{pmatrix}.$$

   d. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 6 - 0,9^n$.

3. Calculer la taille de la colonie au bout du 10^{e} jour. On arrondira le résultat à une fourmi près.

4. Calculer la limite de la suite (u_n). Interpréter ce résultat dans le contexte.