

Le barème indiqué est sur 28.

Exercice 1 (5 points) ✍

L'espace est muni d'un repère orthonormé d'origine O.

Soit d la droite dirigée par $\vec{u}(-3; -1; 2)$ et passant par le point A(2; 0; -1).

1. Le point B(-1; -1; -1) est-il un point de la droite d ?

Le vecteur $\vec{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A) = (-3; -1; 0)$. Les coordonnées de $\vec{AB}$ sont non proportionnelles à celles de $\vec{u}$: le point B n'est donc pas un point de la droite d .

2. Donner une représentation paramétrique de la droite d' passant par C(2; 2; 2) et parallèle à d .

Représentation paramétrique de la droite d' :

$$\begin{cases} x = x_C + t x_{\vec{u}} \\ y = y_C + t y_{\vec{u}} \\ z = z_C + t z_{\vec{u}} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

soit

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 2 - t \\ z = 2 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

3. Soit E(1; 1; 0) et F(0; 1; 1).

- (a) Établir que les points O, E, F déterminent un plan.

Le vecteur $\vec{OE}$ a pour coordonnées (1; 1; 0) et le vecteur $\vec{OF}$ a pour coordonnées (0; 1; 1). Ces deux vecteurs ont donc des coordonnées non proportionnelles : les points O, E, F ne sont donc pas alignés et déterminent donc un plan.

- (b) La droite d est-elle parallèle au plan (OEF) ?

La droite d est parallèle au plan (OEF) si et seulement si son vecteur directeur $\vec{u}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{OE}$ et $\vec{OF}$.

On cherche donc à résoudre le système, d'inconnue $(x; y)$:

$$\begin{cases} -3 = x \\ -1 = x + y \\ 2 = y \end{cases}$$

Le couple $(x; y) = (-3; 2)$ est solution du système (on a $\vec{u} = -3\vec{OE} + 2\vec{OF}$) : la droite d est donc parallèle au plan (OEF).

4. La droite (PQ) où P(4; 7; -5) et Q(5; 9; -2) est-elle sécante à la droite d ?

La droite (PQ) a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 4 - s \\ y = 7 - 2s \\ z = -5 - 3s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}.$

La droite d a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

On cherche à résoudre le système d'inconnue $(s; t) \in \mathbb{R}^2$:

$$(\star) \begin{cases} 4 - s = 2 - 3t \\ 7 - 2s = -t \\ -5 - 3s = -1 + 2t \end{cases}$$

On reporte la seconde ligne ($t = 2s - 7$) dans la troisième ligne : $-5 - 3s = -1 + 4s - 14$, ce qui donne $s = \frac{10}{7}$.

$$\text{On a donc : } (\star) \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - s = 2 - 3t \\ t = 2 \times \frac{10}{7} - 7 \\ s = \frac{10}{7} \end{cases} \quad \text{ou encore : } (\star) \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - s = 2 - 3t \\ t = \frac{-29}{7} \\ s = \frac{10}{7} \end{cases}$$

$$\text{D'où : } (\star) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{18}{7} = \frac{101}{7} \\ t = \frac{-29}{7} \\ s = \frac{10}{7} \end{cases}$$

Le système n'a donc pas de solution : les deux droites sont non sécantes.

Exercice 2 (8 points) ✍

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 6$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = \frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

Le but de cet exercice est d'étudier la limite éventuelle de la suite (u_n) .

Partie A - On souhaite calculer les valeurs des premiers termes de la suite (u_n) à l'aide d'un programme.

Donner le texte d'un algorithme prenant en entrée un entier naturel $n \geq 2$ et renvoyant le terme d'indice n de la suite. On pourra pour cela compléter le début de proposition suivant :

```

a ← 3
b ← 6
Pour k allant de 2 à n :
    c ← .....
    a ← b
    b ← ....
Fin de boucle Pour
    
```

Le résultat (valeur de u_n) est la dernière valeur de b .

A l'aide de ce programme, émettre une conjecture sur la convergence de la suite (u_n) .

L'algorithme :

```
a ← 3
b ← 6
Pour k allant de 2 à n :
    c ←  $\frac{5}{4}b - \frac{1}{4}a$ 
    a ← b
    b ← c
Fin de boucle Pour
```

Programme Ti correspondant :

```
Prompt N
3 → A
6 → B
for(K,2,N)
5/4*B - 1/4*A → C
B → A
C → B
End
Disp B
```

Programme Python correspondant :

```
def u(n):
    a, b = 3, 6
    for k in range(2, n+1):
        a, b = b, 5/4*b - 1/4*a
    return b
```

Avec ce programme, on conjecture que la suite converge vers 7.

Partie B - On considère les suites (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$v_n = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \quad \text{et} \quad w_n = u_n - 7.$$

- (a) i. Démontrer que (v_n) est une suite constante.

Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+2} - \frac{1}{4}u_{n+1} \\ &= \left(\frac{5}{4}u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \right) - \frac{1}{4}u_{n+1} \\ &= u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \\ &= v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc constante.

- ii. En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4}$.

$$v_0 = u_1 - \frac{1}{4}u_0 \text{ d'où } v_0 = \frac{21}{4}.$$

Comme la suite (v_n) est constante, on a $v_n = \frac{21}{4}$ pour tout entier naturel n , c'est à dire :

$$u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n = \frac{21}{4} \text{ pour tout entier naturel } n$$

Ou encore :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4}$$

- iii. En déduire, en utilisant une démonstration par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n < u_{n+1} < 15$.

Amorce. $u_0 = 3$, $u_1 = 6$. On a bien $u_0 < u_1 < 15$.

Hérédité. Soit n un entier naturel pour lequel on aurait $u_n < u_{n+1} < 15$ (hypothèse HR).

Soit f la fonction affine $x \mapsto \frac{1}{4}x + \frac{21}{4}$. Cette fonction conservant l'ordre sur $\mathbb{R}$, on a (sous l'hypothèse HR) : $f(u_n) < f(u_{n+1}) < f(15)$, soit $u_{n+1} < u_{n+2} < f(15)$.

Comme $f(15) = 9$, on a : $u_{n+1} < u_{n+2} < 9 < 15$ et l'hérédité est établie.

Conclusion. $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n < u_{n+1} < 15$.

- iv. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Ce qui précède montre que la suite (u_n) est croissante et majorée (15 est un majorant). Cette suite est donc convergente.

- (b) i. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique de raison 0,25.

Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= u_{n+1} - 7 \\ &= \frac{1}{4}u_n + \frac{21}{4} - 7 \\ &= \frac{1}{4}u_n - \frac{7}{4} \\ &= \frac{1}{4}(u_n - 7) \\ &= 0,25w_n \end{aligned}$$

La suite (w_n) est donc géométrique de raison 0,25.

- ii. En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 7 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} u_n &= w_n + 7 \\ &= w_0 \times 0,25^n + 7 \\ &= (u_0 - 7) \times 0,25^n + 7 \\ &= -4 \times 0,25^n + 7 \\ &= 7 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \end{aligned}$$

iii. Calculer la limite de la suite (u_n) .

Pour $q \in]-1 ; 1[$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$. En particulier $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 7$$

Exercice 3 (4 points) ✍

Partie A - Soit la fonction f définie sur l'ensemble des nombres réels par $f(x) = 2e^x - e^{2x}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

(a) Démontrer que pour tout x appartenant à $[0 ; \ln(2)]$, $f(x)$ est positif.

$$f(x) = e^x (2 - e^x).$$

On a $e^x > 0$ pour tout réel x et $2 - e^x > 0 \iff 2 > e^x \iff \ln(2) > x$ (on utilise ici la stricte croissance de la fonction exponentielle).

On a donc bien $f(x) > 0$ pour tout $x \in [0 ; \ln(2)]$.

(b) Calculer l'aire (en unité d'aire) du domaine délimité par les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln(2)$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}$.

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln(2)} 2e^x - e^{2x} dx &= \left[2e^x - \frac{1}{2}e^{2x} \right]_0^{\ln(2)} \\ &= \left(2e^{\ln(2)} - \frac{1}{2}e^{2\ln(2)} \right) - \left(2e^0 - \frac{1}{2}e^{2 \times 0} \right) \\ &= \left(2 \times 2 - \frac{1}{2}(e^{\ln(2)})^2 \right) - \left(2 - \frac{1}{2} \right) \\ &= \left(4 - \frac{1}{2}(2)^2 \right) - \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Partie B - Soit n un entier strictement positif.

Soit la fonction f_n définie sur l'ensemble des nombres réels par

$$f_n(x) = 2ne^x - e^{2x}$$

et $\mathcal{C}_n$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

(a) Établir que la courbe $\mathcal{C}_n$ admet une tangente horizontale en un unique point, que l'on nommera S_n .

$$f'_n(x) = 2ne^x - 2e^{2x}$$

$$\begin{aligned} f'_n(x) = 0 &\iff 2ne^x - 2e^{2x} = 0 \\ &\iff 2e^x (n - e^x) = 0 \\ &\iff e^x = n \\ &\iff x = \ln(n) \end{aligned}$$

La courbe $\mathcal{C}_n$ admet une tangente horizontale en un unique point, d'abscisse $\ln(n)$.

(b) Est-il vrai que l'ordonnée du point S_n est égale à n^2 ? Vous justifierez évidemment votre réponse.

$$\begin{aligned}
 f_n(\ln(n)) &= 2ne^{\ln(n)} - e^{2\ln(n)} \\
 &= 2n \times n - (e^{\ln(n)})^2 \\
 &= 2n^2 - n^2 \\
 &= n^2
 \end{aligned}$$

L'ordonnée de S_n est donc bien n^2 .

Exercice 4 (7 points) ✍

On considère la suite des nombres complexes (z_n) définie pour tout entier naturel n par

$$z_n = \frac{1+i}{(1-i)^n}.$$

1. (a) Déterminer la forme algébrique de z_0 puis celle de z_1 .

$$\begin{aligned}
 z_0 &= \frac{1+i}{(1-i)^0} \\
 &= 1+i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z_1 &= \frac{1+i}{(1-i)^1} \\
 &= \frac{(1+i) \times (1+i)}{1+1} \\
 &= \frac{2i}{2} \\
 &= i
 \end{aligned}$$

- (b) Démontrer que, pour tout entier naturel n , le nombre $\frac{z_{n+2}}{z_n}$ est de la forme λi où λ est un nombre réel à déterminer.

$$\begin{aligned}
 \frac{z_{n+2}}{z_n} &= \frac{1+i}{(1-i)^{n+2}} \times \frac{(1-i)^n}{1+i} \\
 &= \frac{(1-i)^n}{(1-i)^{n+2}} \\
 &= \frac{1}{(1-i)^2} \\
 &= \frac{1}{-2i} \\
 &= \frac{i}{2}
 \end{aligned}$$

On a donc $\frac{z_{n+2}}{z_n} = \lambda i$ avec $\lambda = \frac{1}{2}$.

- (c) Dédurre des deux questions précédentes les formes algébriques de z_3 et de z_7 .

Avec ce qui précède, on a $z_3 = \lambda i \times z_1 = \lambda i \times i = \frac{-1}{2}$.
 $z_7 = \lambda i \times z_5 = \lambda i \times \lambda i \times z_3 = -\lambda^2 \times z_3 = \frac{1}{8}$.

- (d) Soit M_n le point d'affixe z_n dans un repère orthonormé du plan. Démontrer que les points O (origine du repère), M_n et M_{n+4} sont alignés.

$$\frac{z_{n+4}}{z_n} = \frac{z_{n+4}}{z_{n+2}} \times \frac{z_{n+2}}{z_n}$$

$$= \lambda i \times \lambda i$$

$$= -\lambda^2$$

$$= -0,25$$

On a donc $\frac{\text{affixe}(\overrightarrow{OM_{n+4}})}{\text{affixe}(\overrightarrow{OM_n})} = -0,25$, ou encore $\overrightarrow{OM_{n+4}} = -0,25 \overrightarrow{OM_n}$.
 $\overrightarrow{OM_{n+4}}$ et $\overrightarrow{OM_n}$ sont donc colinéaires et les points O, M_n , M_{n+4} sont donc alignés.

2. (a) Soit k un entier naturel. Établir que z_{4k+3} peut s'écrire sous la forme $\beta_k z_3$ où β_k est un nombre réel à déterminer.

$$z_{4k+3} = \frac{1+i}{(1-i)^{4k+3}}$$

$$= \frac{1+i}{(1-i)^{4k} \times (1-i)^3}$$

$$= \frac{1}{(1-i)^{4k}} \times \frac{1+i}{(1-i)^3}$$

$$= \frac{1}{((1-i)^4)^k} \times z_3$$

$(1-i)^4 = ((1-i)^2)^2 = (-2i)^2 = -4$
On a donc $z_{4k+3} = \beta_k z_3$ avec $\beta_k = (-0,25)^k$.

Autre approche :

$$z_{4k+3} = (-0,25) \times z_{4(k-1)+3} \quad \text{avec la question précédente}$$

$$= (-0,25)^2 \times z_{4(k-2)+3}$$

$$= \dots$$

$$= (-0,25)^k \times z_{4(k-k)+3}$$

$$= (-0,25)^k \times z_3$$

On a donc $z_{4k+3} = \beta_k z_3$ avec $\beta_k = (-0,25)^k$.

- (b) Est-il vrai que z_n est réel pour tout entier naturel n de la forme $4k+3$ (où k est un entier naturel) ? Vous justifierez évidemment votre réponse.

D'après la question précédente, z_{4k+3} est le produit du réel β_k et de $z_3 = -0,5$ donc z_{4k+3} est bien réel.

3. Est-il vrai que z_n est réel pour tout entier naturel n de la forme $4k+1$ (où k est un entier naturel) ? Vous justifierez évidemment votre réponse.

Avec $k=0$, on a $z_{4k+1} = z_1 = i$, non réel. L'affirmation est donc fausse.

Exercice 5 (4 points) ✍

Aucune justification n'est attendue. Cocher V (vrai) ou F (faux) pour chaque affirmation.

A - Soit f la fonction définie sur $]0;\pi[$ par

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

- 1) La fonction f est périodique de période 2π . FAUX (vrai si on définit f sur $\mathbb{R}$ privé des zéros de la fonction sinus).
- 2) La fonction f est périodique de période π . FAUX (vrai si on définit f sur $\mathbb{R}$ privé des zéros de la fonction sinus).
- 3) La fonction f est périodique de période $\frac{\pi}{4}$. FAUX

B - Soit g la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère ortho-normé.

- (a) La fonction g est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$:

$$g'(x) = 1 + (g(x))^2$$

VRAI

- (b) La fonction g est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$:

$$g'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

VRAI

- (c) La fonction g est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[- \{0\}$:

$$g'(x) = \frac{-1}{g(x)}$$

FAUX

C - Soit h la fonction définie sur $[-1;0[$ par :

$$h(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$

- (a) La fonction h est strictement croissante sur $[-1;0[$. FAUX

- (b) La fonction h est strictement décroissante sur $[-1;0[$. VRAI

- (c) h est dérivable sur $[-1;0[$ et

$$h'(x) = \frac{1}{\cos(x) - \frac{1}{\cos(x)}}$$

pour $x \in [-1;0[$. VRAI

- (d) h est dérivable sur $[-1;0[$ et

$$h'(x) = \frac{-\tan(x)}{\sin(x)}$$

pour $x \in [-1;0[$ (on rappelle que $\tan$ est définie par $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$). FAUX

D - On étudie la production d'une usine de bonbons. La machine Artibo fabrique le quart des bonbons, la machine Brema fabrique le restant. La probabilité qu'un bonbon prélevé au hasard dans la production de la machine Artibo présente un défaut est égale à 0,05. La probabilité qu'un bonbon prélevé au hasard dans la production de la machine Brema présente un défaut est égale à 0,02. On note A : « le bonbon est produit par la machine Artibo », D : « le bonbon présente un défaut », B : « le bonbon est fabriqué par la machine Brema ». Lors d'un test, on prélève au hasard un bonbon dans la production de l'usine. On constate qu'il présente un défaut. La probabilité que le bonbon a été produit par la machine Brema est égale à :

(a) $\frac{1}{50}$

(b) $\frac{6}{11}$

(c) $\frac{2}{3}$

(d) $\frac{3}{200}$

(e) $1 - \mathbb{P}_D(A)$

(f) $\mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(D)$.