Février 2019 : correction du bac blanc T.S.

☞ Version du 18 janvier 2019 à 21:53

Exercice 1

1. Les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont-elles parallèles ?

   $\overrightarrow{v_1}(1;\,-3;\,-1)$ et $\overrightarrow{v_2}(1;\,3;\,2)$ vecteurs directeurs associés à ces droites ne sont pas colinéaires.

   Les deux droites ne sont pas parallèles. Sont-elles sécantes ? On a à résoudre le système suivant : $\begin{cases} 3+t &= t' \\ 4-3t &= 2+3t' \\ 1-t &= 2t' \end{cases}$

   On obtient $\begin{cases} 4-3t &= 2+3(3+t) \\ 1-t &= 2(3+t) \end{cases}$, soit $t = -\dfrac{7}{6}$ et $t = -\dfrac{5}{3}$.

   Le système n'a pas de solution.

   Les deux droites ne sont ni parallèles ni sécantes. Elles ne sont donc pas coplanaires.

   $\boxed{\text{Affirmation 1 : FAUSSE.}}$

2. Soit (d) de représentation paramétrique $\begin{cases} x &= 5-2t \\ y &= 6-2t, \qquad t \in \mathbb{R}\,. \\ z &= -2+3t \end{cases}$

   On vérifie si le point $A(-1;\,0;\,7)$ appartient à la droite (d) :

   $\begin{cases} -1 &= 5-2t \\ 0 &= 6-2t, \qquad t \in \mathbb{R} \\ 7 &= -2+3t \end{cases}$. On obtient $t = 3$ pour chacune des équations.

   Le point A appartient à la droite (d).

   On peut déterminer un vecteur directeur de (AB) : $\overrightarrow{AB}\,(4;\,4;\,-6)$.

   Un vecteur directeur de (d) est $(-2;\,-2;\,3)$.

   Ces deux vecteurs sont colinéaires.

   (d) est donc aussi définie par le point A et le vecteur $\overrightarrow{AB}$.Les droites (d) et (AB) sont confondues.

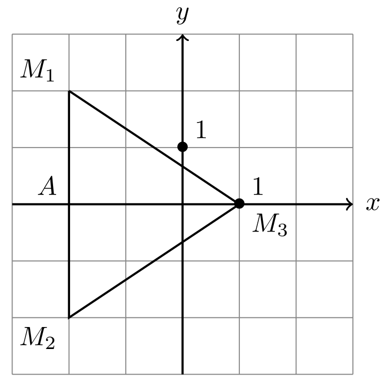
   $\boxed{\text{Affirmation 2 : VRAIE.}}$

3. On a à résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation du second degré $z^2+4z+8=0$. On peut sortir son discriminant :

   $$\Delta = 4^2 - 4\times 1 \times 8 \qquad \Delta = -16 \qquad \Delta = (4\mathrm{i})^2$$

   Deux solutions complexes : $z_1 = -2+2\mathrm{i}$ et $z_2 = -2-2\mathrm{i}$

   Les trois solutions sont associées aux points $M_1(-2+2\mathrm{i}), M_2(-2-2\mathrm{i}), M_3(1)$



   M_1 et M_2 associés à des affixes conjuguées sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Le triangle $M_1M_2M_3$ est isocèle en M_3. Soit $A(-2;\,0)$. Dans le triangle $M_1M_2M_3$, (M_3A) est la hauteur issue de M_3.

   $\mathcal{A}$ l'aire recherchée.

   $$\mathcal{A} = \frac{M_3A \times M_1M_2}{2} \qquad \mathcal{A} = \frac{3\times 4}{2} \qquad \mathcal{A} = 6$$

   $\boxed{\text{Affirmation 3 : VRAIE.}}$

4.

   $$f(x) = \frac{\cos x}{\sin x - 1}$$

   $$f'(x) = \frac{-\sin x(\sin x - 1) - \cos^2 x}{(\sin x - 1)^2}$$

   $$f'(x) = \frac{\sin x - 1}{(\sin x - 1)^2} \qquad f'(x) = \frac{1}{\sin x - 1}$$

   $\boxed{\text{Affirmation 4 : VRAIE.}}$

Exercice 2

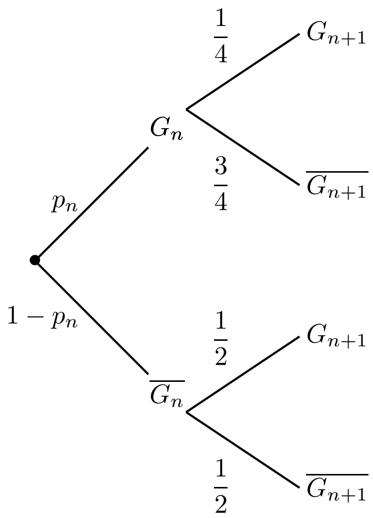
1. Les événements G_1 et $\overline{G_1}$ forment une partition de l'univers. On peut donc appliquer la formule des probabilités totales.

   $p_2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$, $\boxed{\boldsymbol{p_2 = \frac{7}{16}}.}$

2. Toujours en utilisant la formule des probabilités totales, ici avec G_n et $\overline{G_n}$:
   $p_{n+1} = \frac{1}{4} \times p_n + \frac{1}{2} \times (1 - p_n)$.

   $$\boxed{\boldsymbol{p_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}}.}$$

   Arbre pondéré :



3. $\boxed{\text{On peut conjecturer que la suite } (p_n)_{n\geqslant 1} \text{ tend vers } 0{,}4.}$

4. a)

   $$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{2}{5} \qquad u_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{5}$$

   $$u_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{10} \qquad u_{n+1} = -\frac{1}{4}\left(p_n - \frac{2}{5}\right)$$

   $$u_{n+1} = -\frac{1}{4}u_n$$

   $$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est géométrique de raison } -\frac{1}{4} \text{ et de premier terme } u_1 = -\frac{3}{20}.}$$

   b) La forme explicite de u_n est $u_n = -\frac{3}{20} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$. On en déduit :

   $$\boxed{\boldsymbol{p_n = \frac{2}{5} - \frac{3}{20} \times \left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}, n \geqslant 1}}$$

   c) On a $\left|-\frac{1}{4}\right| < 1$, donc $\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ tend vers 0.

   $$\boxed{p_n \text{ a pour limite } \frac{2}{5}.}$$

Exercice 3

1. $x > 0$: la largeur est $2x$.

   $y > 0$: la hauteur est $y = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2)$.

   $$\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2) = 2x$$

   $$\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2 = 4x \qquad \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 4x - 2 = 0$$

   $$\boxed{\text{Largeur=Hauteur} \Longleftrightarrow \boldsymbol{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 4x - 2 = 0}}$$

2. a)

   $$\begin{aligned} x\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x} - 4\right) + \mathrm{e}^{-x} - 2 &= x \times \frac{\mathrm{e}^x}{x} - 4x + \mathrm{e}^{-x} - 2 \\ &= \mathrm{e}^x - 4x + \mathrm{e}^{-x} - 2 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

   b) Etude de la limite de f en $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} - 4 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 4\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 4\right) + e^{-x} - 2 = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

3. a) $\boxed{f'(x) = e^x - e^{-x} - 4}$

   b) On passe d'une ligne à la suivante par une équivalence.

$$f'(x) = 0$$
$$e^x - e^{-x} - 4 = 0 \qquad e^x \neq 0$$
$$e^x\left(e^x - e^{-x} - 4\right) = 0$$
$$\left(e^x\right)^2 - 4e^x - 1 = 0$$

$\boxed{f'(x) = 0 \text{ équivaut à } \left(e^x\right)^2 - 4e^x - 1 = 0.}$

   c) L'équation à résoudre est $X^2 - 4X - 1 = 0$ pour $X \in \mathbb{R}_*^+$.

   On calcule le discriminant : $\Delta = 20$, $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{5}$.

   Sur $\mathbb{R}$ cette équation a deux solutions distinctes : $X_1 = 2 - \sqrt{5} < 0$ et $X_2 = 2 + \sqrt{5} > 0$.

   On retient la solution positive $X = e^x = 2 + \sqrt{5}$.

   On en déduit l'unique solution de l'équation initiale $(f'(x) = 0)$:

   $\boxed{x = \ln\left(2 + \sqrt{5}\right)}$.

4. a) Tableau de variations établi en fonction du signe de la fonction dérivée :

x	0	$\ln(2+\sqrt{5})$	$+\infty$
$f(x)$	0 ↘	$\approx -3{,}3$	↗ $+\infty$

   b) Sur $\left]0; \ln\left(2+\sqrt{5}\right)\right]$, f est strictement négative. $f(x) = 0$ n'admet donc pas de solution sur cet intervalle.

   Sur $\left[\ln\left(2+\sqrt{5}\right); +\infty\right[$, f est continue, strictement croissante et change de signe.

   D'après le corollaire du T.V.I, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur cet intervalle $\left(\alpha \in \left]\ln\left(2+\sqrt{5}\right); +\infty\right[\right)$.

5. a) On itère tant que $b - a > 0{,}1$.

m	a	b	$b-a$
	2	3	1
2,5	2	2,5	0,5
2,25	2,25	2,5	0,25
2,375	2,375	2,5	0,125
2,4375	2,4375	2,5	0,0625

   L'amplitude initiale de l'intervalle $[a; b]$ a été divisée par 2^4. A la fin de l'algorithme, on a $a < \alpha < b$ avec $b - a = 1 \div 16$.

   b) L'intervalle $[a; b]$ donne un encadrement de α solution positive de $f(x) = 0$.

   $\boxed{2{,}4375 < \alpha < 2{,}5.}$

6. Avec α solution de $f(x) = 0$, on a : $2{,}4375 < \alpha < 2{,}5$.

   On obtient $190 < 2t < 195$.

   L'encadrement est $]190; 195[$ (unité = le mètre).

Exercice 4

1. Au premier juin 2017 il y a $3\,000$ individus.

   Il arrive 80 individus sur la période juin-octobre.

   Au premier novembre 2017 il y a $3\,080$ individus.

   De cette date jusqu'à fin mai 2018, il y a une baisse de $5\,\%$.

   Au 1er juin 2018 il y a donc $3\,080 \times 0{,}95$ individus : $\boxed{\boldsymbol{u_1 = 2926}}$.

2. L'évolution d'une année sur l'autre se résume en un ajout de 80 individus puis une baisse de $5\,\%$ de la population :

   $u_{n+1} = 0{,}95 \times (u_n + 80) \qquad \boxed{\boldsymbol{u_{n+1} = 0{,}95u_n + 76}}$

3. En C2 on place $\boxed{= \mathbf{0.95} \times \mathbf{B2} + \mathbf{76}}$

4. a) On réalise une démonstration par récurrence.

Soit $P(n)$ la proposition $u_n > 1\,520$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : $u_0 = 3\,000$, $u_0 > 1\,520$. $P(0)$ est vraie.

Hérédité : soit $n \geqslant 0$ tel que $P(n)$ soit vraie. On démontre que $P(n+1)$ est vraie.

$$u_n > 1\,520 \qquad 0{,}95u_n > 1\,520 \times 0{,}95$$

$$0{,}95u_n > 1\,444 \qquad 0{,}95u_n + 76 > 1520$$

$$u_{n+1} > 1520$$

$P(n+1)$ est vraie, l'hérédité est démontrée.

Du fait du principe de récurrence la proposition $P(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

$\boxed{\forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \boldsymbol{u_n} > \mathbf{1\,520}}$

b) On étudie le signe de la différence de deux termes consécutifs.

Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = 0{,}95u_n + 76 - u_n$$

$$u_{n+1} - u_n = -0{,}05u_n + 76$$

$$u_{n+1} - u_n = -0{,}05(u_n - 1520) \qquad u_n - 1520 > 0$$

$$u_{n+1} - u_n < 0$$

$\boxed{\text{La suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est strictement décroissante.}}$

c) La suite (u_n) est minorée par $1\,520$ et est décroissante.

$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est donc convergente (limite } l \geqslant 1\,520\text{).}}$

5. • D'après la question précédente (u_n) a pour limite l. On en déduit que $(0{,}95u_n + 76)$ a pour limite $0{,}95l + 76$

Les suites (u_n) et (u_{n+1}) ont même limite. (u_{n+1}) tend vers l.

$u_{n+1} = 0{,}95u_n + 76$ donc (u_{n+1}) et $(0{,}95u_n + 76)$ ont la même limite.

Finalement $l = 0{,}95l + 76$.

• Avec l vérifiant $l = 0{,}95l + 76$:

$$l = 0{,}95l + 76 \qquad 0{,}05l = 76$$

$\boxed{\text{La limite est : } l = 1520.}$

6. Algorithme :

```
n <- 0
u <- 3000
Tant que u >= 2000
  n <- n+1
  u <- 0,95 * u + 76
Fin Tant que
Afficher 2017 + n
```

7. La suite (u_n) est strictement décroissante et sa limite est $1\,520$. Il existe donc un rang N à partir duquel pour $n \geqslant N$ u_n sera inférieur à $2\,000$.

$\boxed{\text{La réserve fermera un jour.}}$

La calculatrice nous fournit : $u_{21} > 2024$ et $u_{22} < 1999$.

$\boxed{\text{La réserve fermera en 2039.}}$

★ ★ ★ ★ ★ ★

That's all folks