TS – Baccalauréat blanc 2020 – SUJET A

Durée : 4 h.

Les calculatrices seront placées en mode examen en début d'épreuve.

Le barème indiqué est sur 30.

Exercice 1 (6 points)

La vasopressine est une hormone favorisant la réabsorption de l'eau par l'organisme.

Le taux de vasopressine dans le sang est considéré normal s'il est inférieur à 2,5 µg/mL.

Cette hormone est sécrétée dès que le volume sanguin diminue. En particulier, il y a production de vasopressine suite à une hémorragie.

On utilisera dans la suite la modélisation suivante :

$$f(t) = 3t\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} + 2 \text{ avec } t \geqslant 0,$$

où $f(t)$ représente le taux de vasopressine (en µg/mL) dans le sang en fonction du temps t (en minute) écoulé après le début d'une hémorragie.

1. **1 pt** Reproduire sur votre copie et compléter le tableau suivant (on arrondira les résultats au centième de µg/mL) :

temps en minute	0	3	12	20
taux de vasopressine en µg/mL				
Le taux est normal ? (oui/non)				

Proposition de correction

temps en minute	0	3	12	20
taux de vasopressine en µg/mL	2	6,25	3,79	2,40
Le taux est normal ? (oui/non)	oui	non	non	oui

2. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$.

   (a) **1 pt**

   Vérifier que pour tout nombre réel $t \in [0\,;\,+\infty[$, $f'(t)$ a le signe de $4-t$.

   Proposition de correction

$$f'(t) = 3\exp\left(-\frac{1}{4}t\right) - \frac{3}{4}t\exp\left(-\frac{1}{4}t\right)$$
$$f'(t) = \frac{3}{4}\exp\left(-\frac{1}{4}t\right)(4-t)$$

   Le facteur $\frac{3}{4}\exp\left(-\frac{1}{4}t\right)$ est strictement positif. $f'(t)$ a donc le signe de $4-t$.

(b) **1 pt** Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

À quel instant le taux de vasopressine est-il maximal ? Quel est alors ce taux ? On en donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.

Proposition de correction

D'après le cours, la limite de $3t\exp\left(-\frac{1}{4}t\right)$ en $+\infty$ est 0. f a donc pour limite 2 en $+\infty$.

$f(0) = 2$, $f(4) = \dfrac{12}{\mathrm{e}} + 2 \approx 6{,}41$.

Sur $[0; +\infty[$, f' s'annule en changeant de signe pour $t = 4$. f possède sur cet intervalle un maximum pour $t = 4$, sa valeur approchée est 6,41.

t	0		4		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	2	$\nearrow$	$\frac{12}{\mathrm{e}}+2$	$\searrow$	2

3. (a) **1 pt** Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(t) = 2{,}5$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$? **Justifiez !**

Proposition de correction

Sur l'intervalle $[0; 4]$:

f est continue et strictement croissante. $f(0) < 2{,}5$ et $f(4) > 2{,}5$. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2{,}5$ a une unique solution sur cet intervalle.

Sur l'intervalle $[4; +\infty[$:

f est continue strictement décroissante. $f(4) > 2{,}5$ et la limite de f en $+\infty$ est 2. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2{,}5$ a une unique solution sur cet intervalle.

$\boxed{\text{Sur } [0; +\infty[\text{, l'équation } f(t) = 2{,}5 \text{ admet deux solutions.}}$

(b) **1 pt**

Donner une valeur approchée à 10^{-3} près des solutions.

Proposition de correction

La calculatrice nous fournit les valeurs approchées suivantes : 0,174 et 18,930.

(c) **1 pt** En déduire la durée, arrondie à la seconde, pendant laquelle une personne victime d'une hémorragie a un taux de vasopressine supérieur à 2,5 µg/mL.

Proposition de correction

1 125 secondes, soit 18 minutes et 45 secondes

Exercice 2 (11 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et, pour tout entier $n \geqslant 0$: $u_{n+1} = 3 - \dfrac{10}{u_n + 4}$.

On rappelle que l'on peut évidemment admettre le résultat annoncé dans une question pour répondre aux questions suivantes, même si l'on n'a pas réussi à démontrer ce résultat !

- Partie A -

1. **1 pt** Déterminer la valeur **exacte** de u_1 et la valeur **exacte** de u_2.

Proposition de correction

$$u_1 = 3 - \frac{10}{5+4} \qquad u_1 = \frac{17}{9}$$

$$u_2 = 3 - \frac{10}{\frac{17}{9}+4} \qquad u_2 = 3 - 10 \div \frac{53}{9}$$

$$u_2 = \frac{69}{53}$$

2. **1 pt** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a $u_n > 1$.

Proposition de correction

Pour tout n entier naturel, on note $\mathrm{P}(n)$ la proposition "$u_n > 1$".

Initialisation :

$u_0 = 5$, $u_0 > 1$. $\mathrm{P}(0)$ est vraie.

Hérédité :

Soit n un entier naturel tel que $\mathrm{P}(n)$ soit vraie. Démontrons que $\mathrm{P}(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}
u_n &> 1 \\
u_n + 4 &> 5 \quad \text{La fonction inverse est décroissante sur }]0\,; +\infty[\text{ donc :} \\
\frac{1}{u_n+4} &< \frac{1}{5} \\
\frac{10}{u_n+4} &< 2 \\
-2 &< -\frac{10}{u_n+4} \\
1 &< 3 - \frac{10}{u_n+4} \\
1 &< u_{n+1}
\end{aligned}$$

$\mathrm{P}(n+1)$ est vraie. L'hérédité est démontrée.

Conclusion

Du fait du principe de récurrence, la propriété $\mathrm{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel : $u_n > 1$ pour tout n.

3. **1 pt** Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$.

Proposition de correction

$$u_{n+1} - u_n = 3 - \frac{10}{u_n+4} - u_n \qquad u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 - u_n + 2}{u_n+4}$$

Dans le polynôme $-x^2 - x + 2$, 1 est racine évidente. Le produit des racines est -2. La deuxième racine est -2. D'où la factorisation $-(x-1)(x+2) = (1-x)(x+2)$.

Finalement $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$

4. **1 pt** En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

Proposition de correction

On a démontré (question 2) que $u_n > 1$.

On en déduit $1 - u_n < 0$, $u_n + 2 > 0$, $u_n + 4 > 0$.

Puisque $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$, on obtient $u_{n+1} - u_n < 0$.

La suite (u_n) est décroissante.

5. **1 pt** Justifier que la suite (u_n) converge.

Proposition de correction

La suite (u_n) est décroissante et minorée, elle est donc convergente.

- Partie B -

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

1. (a) **1 pt** Démontrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$.

Proposition de correction

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} \qquad v_{n+1} = \frac{3 - \frac{10}{u_n+4} - 1}{3 - \frac{10}{u_n+4} + 2}$$

$$v_{n+1} = \frac{2 - \frac{10}{u_n+4}}{5 - \frac{10}{u_n+4}} \qquad v_{n+1} = \frac{2u_n - 2}{5u_n + 10}$$

$$v_{n+1} = \frac{2(u_n-1)}{5(u_n+2)} \qquad v_{n+1} = \frac{2}{5} \times v_n$$

La suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{2}{5}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{4}{7}$.

(b) **1 pt** En déduire une expression de v_n en fonction de n.

Proposition de correction

$$v_n = v_0 \times \left(\frac{2}{5}\right)^n, \qquad v_n = \frac{4}{7} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

2. **1 pt** Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{2v_n + 1}{1 - v_n}$.

Proposition de correction

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2} \qquad v_n \times (u_n + 2) = u_n - 1$$

$$v_n \times u_n + 2v_n = u_n - 1 \qquad (v_n - 1) \times u_n = -2v_n - 1$$

$$u_n = \frac{2v_n + 1}{1 - v_n}$$

- Partie C -

1 pt Déterminer la limite de la suite (u_n) à l'aide de la partie B ou de la partie A. Justifier.

Proposition de correction

(v_n) est une suite géométrique de raison strictement comprise entre 0 et 1. Sa limite est donc 0.
$2v_n + 1$ et $1 - v_n$ sont deux suites qui tendent vers 1. Il en est de même pour leur rapport.
On en déduit que la limite de la suite (u_n) est 1.

- Partie D -

On considère l'algorithme ci-contre.

1. **1 pt** Après exécution de l'algorithme, quelle valeur est contenue dans la variable n ?

Proposition de correction

On sort de la boucle lorsque $u_n < 1{,}01$. La calculatrice nous donne $u_5 \approx 1{,}017$ et $u_6 \approx 1{,}00$.
La valeur de n en sortie de la boucle est $n = 6$.

2. **1 pt** Soit N la valeur de la variable n obtenue après exécution de l'algorithme. Est-il vrai que l'on a $u_k < 1{,}01$ pour tout entier $k > \mathrm{N}$? (**Justifier !**)

```
u ← 5
n ← 0
Tant que u ⩾ 1,01
    n ← n + 1
    u ← 3 − 10/(u + 4)
Fin du Tant que
```

Proposition de correction

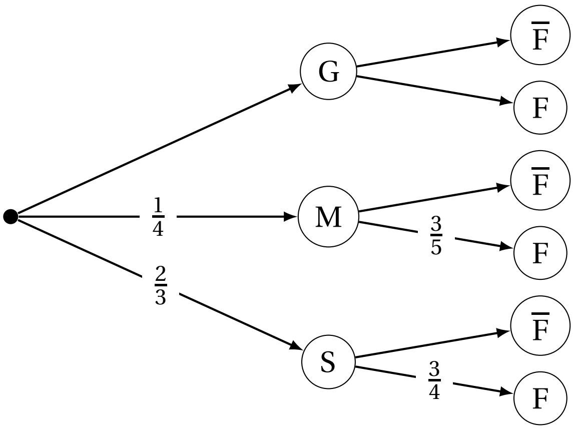
N est le premier entier naturel tel que $u_{\mathrm{N}} < 1{,}01$. La suite (u_n) est décroissante. Donc pour tout $n > \mathrm{N}$ on a $u_n < u_{\mathrm{N}} < 1{,}01$.

Exercice 3 (5 points)
Une association propose à ses adhérents des paniers de légumes. Chaque adhérent a le choix entre trois tailles de panier :

- un panier de petite taille ;
- un panier de taille moyenne ;
- un panier de grande taille.

L'association envisage de proposer en outre des livraisons d'œufs frais. Pour savoir si ses adhérents sont intéressés, elle réalise un sondage.
On interroge un adhérent au hasard. On considère les évènements suivants :

- S : « l'adhérent choisit un panier de petite taille » ;
- M : « l'adhérent choisit un panier de taille moyenne » ;
- G : « l'adhérent choisit un panier de grande taille » ;
- F : « l'adhérent est intéressé par une livraison d'œufs frais ».



On a $\mathbb{P}(S) = \frac{2}{3}$, $\mathbb{P}(M) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}_S(F) = \frac{3}{4}$, $\mathbb{P}_M(F) = \frac{3}{5}$.

1. (a) **1 pt** Calculer la probabilité que l'adhérent choisisse un panier de petite taille et soit intéressé par une livraison d'œufs frais.

Proposition de correction

L'événement considéré est $S \cap F$:

$$\begin{aligned} P(S \cap F) &= P(S) \times P_S(F) \\ &= \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\boxed{P(S \cap F) = \frac{1}{2}}$$

(b) **1 pt** Calculer $\mathbb{P}\left(M \cap \overline{F}\right)$, puis interpréter ce résultat à l'aide d'une phrase.

Proposition de correction

$$P(M \cap \overline{F}) = P(M) \times P_M(\overline{F})$$
$$P(M \cap \overline{F}) = P(M) \times (1 - P_M(F))$$
$$P(M \cap \overline{F}) = \frac{1}{4} \times \left(1 - \frac{3}{5}\right)$$

$$\boxed{P(M \cap \overline{F}) = \frac{1}{10}}$$

C'est la probabilité qu'un adhérent choisisse un panier de taille moyenne et ne soit pas intéressé par une livraison d'oeufs frais.

(c) **1 pt** La livraison d'œufs frais ne sera mise en place que si la probabilité de l'évènement F est supérieure à 0,6. Pourquoi peut-on affirmer que cette livraison sera mise en place ?

Proposition de correction

Les évènements S, M et G forment une partition de l'univers. D'après le théorème de probabilités totales :

$$\begin{aligned}
P(F) &= P(S\cap F)+P(M\cap F)+P(G\cap F)\\
P(F) &= P(S\cap F)+P(M)\times P_M(F)+P(G\cap F)\\
P(F) &= 0,5+\frac{1}{4}\times\frac{3}{5}+P(G\cap F)\\
P(F) &= 0,5+0,15+P(G\cap F)\\
P(F) &= 0,65+P(G\cap F)\quad \text{et } P(G\cap F)\geq 0
\end{aligned}$$

$\boxed{P(F)>0,6. \text{ La livraison sera mise en place}}$

2. Dans cette question, on suppose que $\mathbb{P}(F) = 0{,}675$.

(a) **1 pt** Déterminer la probabilité conditionnelle de F sachant G (c'est à dire $\mathbb{P}_G(F)$).

Proposition de correction

$$\begin{aligned}
P(F) &= 0,65+P(G\cap F)\\
0,675 &= 0,65+P(G\cap F)\\
0,025 &= P(G\cap F)\\
P_G(F) &= \frac{P(G\cap F)}{P(G)}
\end{aligned}$$

Les évènements S, M et G réalisent une partition de l'univers. On en déduit :

$$\begin{aligned}
P(S)+P(M)+P(G) &= 1\\
P(G) &= 1-P(S)-P(M)\\
P(G) &= 1-\frac{2}{3}-\frac{1}{4}\\
P(G) &= \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

Puis : $P_G(F) = 0,025\div\frac{1}{12}$

$\boxed{P_G(F)=0,3}$

(b) **1 pt** L'adhérent interrogé est intéressé par la livraison d'œufs frais.

Quelle est la probabilité qu'il ait choisi un panier de taille moyenne ? Arrondir le résultat à 10^{-2}.

Proposition de correction

$$\begin{aligned} P(M\cap F) &= P(M)\times P_M(F) \\ &= \frac{1}{4}\times\frac{3}{5} \\ &= \frac{3}{20} \\ P_F(M) &= \frac{P(M\cap F)}{P(F)} \\ &= \frac{3}{20}\div 0,675 \end{aligned}$$

$$\boxed{P_F(M) = \frac{2}{9}\approx 0,22}$$

Exercice 4 (QCM, 8 points)

Cet exercice ne doit être traité que si vous NE SUIVEZ PAS **la spécialité mathématiques.**

Pour chaque numéro, donner la lettre correspondant à la bonne réponse.
Aucune justification n'est demandée.
Un point pour une bonne réponse. 0 pour mauvaise réponse ou absence de réponse. Plusieurs réponses pour un même numéro est compté comme mauvaise réponse.

1. Dans un repère $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ de l'espace, d est une droite passant par $A(1;2;3)$ et dirigée par $\vec{u}\,(4;5;7)$.
   Une représentation paramétrique de d est :
   a) $\begin{cases} x=9+12t \\ y=12+15t \quad t\in\mathbb{R} \\ z=17+21t \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=4+t \\ y=5+2t \quad t\in\mathbb{R} \\ z=7+3t \end{cases}$ c) $\begin{cases} x=-1-4t \\ y=-2-5t \quad t\in\mathbb{R} \\ z=-3-7t \end{cases}$

   Proposition de correction

   Réponse a
2. Soit $\mathscr{P}$ un plan et A, B, C trois points non alignés dans ce plan.
   Soit E et F deux points de l'espace. On sait qu'il existe deux réels α et β tels que $\overrightarrow{EF}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$.
   On peut affirmer :

   a) La droite (EF) est une droite du plan $\mathscr{P}$.

   b) La droite (EF) est une droite parallèle au plan $\mathscr{P}$.

   c) La droite (EF) est une droite sécante au plan $\mathscr{P}$.

   d) La droite (EF) est une droite strictement parallèle au plan $\mathscr{P}$.

   Proposition de correction

   Réponse b

3. Quelle affirmation est **fausse** ?

   a) Si une droite d est parallèle à deux plans sécants $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ alors d est parallèle à $\mathscr{P} \cap \mathscr{Q}$.

   b) Si une droite d_1 n'a aucun point commun avec une droite d_2 et que la droite d_2 est parallèle à une droite d_3 alors d_1 est parallèle à d_3.

   c) Soient $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ deux plans parallèles. Si un plan $\mathscr{R}$ est sécant aux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{Q}$ alors $\mathscr{R} \cap \mathscr{Q}$ est parallèle à $\mathscr{R} \cap \mathscr{P}$.

Proposition de correction

Affirmation fausse : réponse b

4. La fonction tan est définie sur $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ par $\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$.
   Cette fonction est dérivable sur $\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.
   Quelle affirmation est **fausse** ?

   (a) Pour tout réel $t \in \left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, on a $\tan'(t) = (\cos(t))^{-2}$.

   (b) Pour tout réel $t \in \left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, on a $\tan'(t) = 1 + \tan^2(t)$.

   (c) Pour tout réel $t \in \left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, on a $\tan'(t) = 1 - \tan^2(t)$.

   (d) Pour tout réel $t \in \left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, on a $\tan'(t) = \frac{1}{1-\sin^2(t)}$.

Proposition de correction

Affirmation fausse : réponse c

5. L'ensemble des solutions de l'inéquation $\sin(x) \geqslant \frac{-\sqrt{3}}{2}$ sur $[0;2\pi]$ est :

   a) $\left[0;\frac{4\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3};2\pi\right]$.

   b) $\left[0;\frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6};2\pi\right]$.

   c) $\left[\frac{-\sqrt{3}}{2};1\right]$.

Proposition de correction

Réponse a

6. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos\left(\sqrt{2}\pi x + \frac{\pi}{4}\right)$ est :

   a) périodique de période $\frac{\pi}{4}$.

   b) périodique de période $\sqrt{2}$.

   c) périodique de période 2π.

   d) périodique de période $\sqrt{2}\pi$.

Proposition de correction

Réponse b

7. Soient $z = a + ib$ et $w = x + iy$ deux complexes (avec $w \neq 0$ et a, b, x, y réels).
   La partie réelle du complexe $\frac{z}{w}$ est égale à :

a) $\frac{a}{x}$

b) $\frac{ax+by}{x^2+y^2}$

c) $\frac{ax-by}{x^2+y^2}$

d) $\frac{ax+by}{x^2-y^2}$

Proposition de correction

Réponse b

8. Soit m un réel. On note $\mathscr{E}$ l'équation $2z^2+(m-5)z+m=0$ à inconnue $z \in \mathbb{C}$.
On peut affirmer :

a) Il existe au moins une valeur de m telle que l'équation $\mathscr{E}$ n'a aucune solution.

b) Pour $m=5$, l'équation $\mathscr{E}$ admet pour solutions des imaginaires purs.

c) Pour toute valeur de m, l'équation $\mathscr{E}$ admet des solutions complexes non réelles.

d) Pour toute valeur de m, l'équation $\mathscr{E}$ admet des solutions réelles.

Proposition de correction

Réponse b