TERMINALES SCIENTIFIQUES

BACCALAUREAT BLANC

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Eléments de correction.

Exercice 1

① Expérience aléatoire : tirage simultané de 3 cravates parmi les 10 rangées à gauche de l'armoire (7 à motifs et 3 unies). Cardinal de l'univers : $C_{10}^{3}=120$.

Variable aléatoire X : nombre de cravates à motifs choisies. Valeurs prises par X : 0, 1, 2 et 3.

Soit k un entier compris entre 0 et 3 (inclus). Le cardinal de l'événement $X=k$ (i.e. choisir k cravates à motifs parmi 7 et $3-k$ cravates unies parmi 3) est : $card\left(X=k\right)=C_7^k\times C_3^{3-k}$.

Les tirages (au hasard) étant équiprobables, on a : $p\left(X=k\right)=\dfrac{C_7^k\times C_3^{3-k}}{120}$.

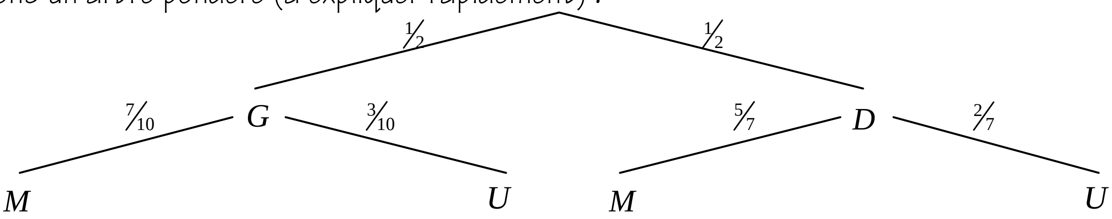
Application numérique : on donne la loi de X sous forme de tableau.

k	0	1	2	3
$p\left(X=k\right)$	$\dfrac{1}{120}$	$\dfrac{21}{120}=\dfrac{7}{40}$	$\dfrac{63}{120}=\dfrac{21}{40}$	$\dfrac{35}{120}=\dfrac{7}{24}$

On vérifie que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{3}p\left(X=k\right)=1$.

$E\left(X\right)=\displaystyle\sum_{k=0}^{3}k\ p\left(X=k\right)=\boxed{\dfrac{21}{10}}=2{,}1$. Interprétation de ce résultat : en moyenne, M. Martin peut espérer obtenir 2,1 cravates à motifs par « tirage » (de 3 cravates).

② Plantons un arbre pondéré (à expliquer rapidement) :



D'où :

$p\left(M\right)=p\left(M\cap G\right)+p\left(M\cap D\right)$ car $M\cap G$ et $M\cap D$ forment une partition de l'événement M

$p\left(M\right)=p\left(G\right)\times p_G\left(M\right)+p\left(D\right)\times p_D\left(M\right)$ par définition des probabilités conditionnelles

Application numérique : $p\left(M\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{7}{10}+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{7}=\boxed{\dfrac{99}{140}}$.

Et par conséquent : $p_M\left(G\right)=\dfrac{p\left(G\cap M\right)}{p\left(M\right)}=\dfrac{p\left(G\right)\times p_G\left(M\right)}{p\left(M\right)}$

Application numérique : $p_M\left(G\right)=\dfrac{\frac{1}{2}\times\frac{7}{10}}{\frac{99}{140}}=\boxed{\dfrac{49}{99}}$. Penser à vérifier la plausibilité de ce résultat …

③ Expérience aléatoire : tirage de 1 cravate dans l'armoire ; il s'agit d'une épreuve de Bernoulli (i.e. à 2 issues). Ou bien M. Martin obtient une cravate à motifs, avec une probabilité $p(M)=\frac{99}{140}$; ou bien il obtient une cravate unie, avec une probabilité $p(U)=1-p(M)=\frac{41}{140}$.

Cette épreuve est répétée n fois de suite, de manière indépendante
(car il s'agit de tirages AVEC remise, et faits au hasard).
Evénement E : choisir au moins une cravate à motifs.
Evénement contraire $\overline{E}$: ne choisir aucune cravate à motifs, c'est-à-dire n cravates unies.

$p(\overline{E})=\frac{41}{140}\times\frac{41}{140}\times\cdots\times\frac{41}{140}=\left(\frac{41}{140}\right)^n$; d'où $p(E)=\boxed{p_n=1-\left(\frac{41}{140}\right)^n}$.

$p_n\geq 0,99 \Leftrightarrow \left(\frac{41}{140}\right)^n\leq 0,01 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{41}{140}\right)^n\leq \ln 0,01$ car la fonction ln est croissante sur $]0\,;+\infty[$

$\Leftrightarrow n\ln\frac{41}{140}\leq \ln 0,01 \Leftrightarrow n\geq\frac{\ln 0,01}{\ln\frac{41}{140}}$ car $\ln\frac{41}{140}<0$ (car $0<\frac{41}{140}<1$).

Or : $\frac{\ln 0,01}{\ln\frac{41}{140}}\approx 3,75$. D'où $\boxed{n\geq 4}$.

Exercice 2 (non spécialistes) (calculs à détailler)

① Solutions complexes conjuguées de l'équation $z^2-6z+12=0$: $\boxed{u=3+i\sqrt{3}}$ et $\boxed{\overline{u}=3-i\sqrt{3}}$.

$|u|=\boxed{2\sqrt{3}}$ et $\arg u\equiv\boxed{\frac{\pi}{6}}(\text{mod }2\pi)$; donc $|\overline{u}|=|u|=\boxed{2\sqrt{3}}$ et $\arg\overline{u}\equiv-\arg u\equiv\boxed{\frac{-\pi}{6}}(\text{mod }2\pi)$

② $u-4=\boxed{-1+i\sqrt{3}}=\boxed{2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}$.

$\left|\frac{u}{u-4}\right|=\frac{|u|}{|u-4|}=\boxed{\sqrt{3}}$ et $\arg\frac{u}{u-4}\equiv\arg u-\arg(u-4)\equiv\boxed{\frac{-\pi}{2}}(\text{mod }2\pi)$.

$\frac{\overline{u}}{\overline{u}-4}=\frac{\overline{u}}{\overline{u}-\overline{4}}=\frac{\overline{u}}{\overline{u-4}}=\overline{\left(\frac{u}{u-4}\right)}$; donc $\left|\frac{\overline{u}}{\overline{u}-4}\right|=\left|\frac{u}{u-4}\right|=\boxed{\sqrt{3}}$ et $\arg\frac{\overline{u}}{\overline{u}-4}\equiv-\arg\frac{u}{u-4}\equiv\boxed{\frac{\pi}{2}}(\text{mod }2\pi)$.

③ u et $u-4$ sont les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{AM}$.

$\arg\frac{u}{u-4}\equiv mes\left(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{OM}\right)\equiv mes\left(\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MO}\right)\equiv\frac{-\pi}{2}(\text{mod }2\pi)$,

donc le triangle OAM est rectangle en M. D'où : M appartient au cercle de diamètre $[OA]$.

De même : $\overline{u}$ et $\overline{u}-4$ sont les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{ON}$ et $\overrightarrow{AN}$.

$\arg\frac{\overline{u}}{\overline{u}-4}\equiv mes\left(\overrightarrow{AN}\,;\overrightarrow{ON}\right)\equiv mes\left(\overrightarrow{NA}\,;\overrightarrow{NO}\right)\equiv\frac{\pi}{2}(\text{mod }2\pi)$,

donc le triangle OAN est rectangle en N. D'où : N appartient au cercle de diamètre $[OA]$.

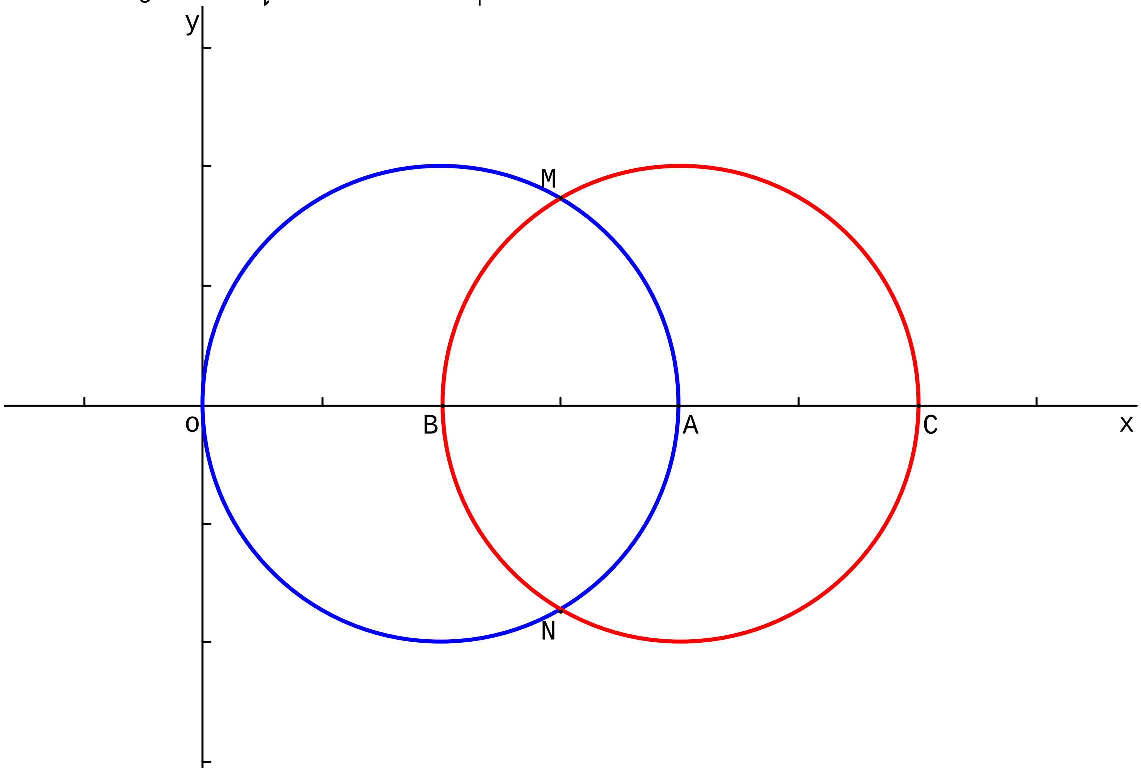
Ainsi : les points O, A, M et N appartiennent au même $\boxed{\text{cercle de diamètre } [OA]}$.

$\left|\frac{u}{u-4}\right|=\frac{|u|}{|u-4|}=\sqrt{3}$; donc $AM=|u-4|=\frac{|u|}{\sqrt{3}}=2$.

De même : $\left|\frac{\bar{u}}{\bar{u}-4}\right| = \frac{|\bar{u}|}{|\bar{u}-4|} = \sqrt{3}$; donc $AN = |\bar{u}-4| = \frac{|\bar{u}|}{\sqrt{3}} = 2$. De plus : $AB = AC = 2$ (trivial).

D'où : les points B, C, M et N appartiennent au $\boxed{\text{cercle de centre } A \text{ et de rayon } 2}$.

La **construction géométrique** de M et N peut alors être effectuée.



$\boxed{\text{Problème}}$ (calculs à détailler)

Partie A : $f(x) = x + e^{-x} = x + \frac{1}{e^x}$

① $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$ car $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x)$: forme indéterminée. Or, $f(x) = \frac{xe^x+1}{e^x}$

Selon le formulaire : $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ (croissance comparée). De plus : $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+$. Donc $\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$.

② On sait que $(e^u)' = u'e^u$. Donc $f'(x) = 1 - e^{-x} = 1 - \frac{1}{e^x} = \boxed{\frac{e^x-1}{e^x}}$.

Or, $e^x > 0$ pour tout réel x. Donc $f'(x)$ est du signe de $e^x - 1$

On a : $e^x - 1 > 0 \iff e^x > 1 \iff x > 0$ car la fonction exp (ou ln) est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

De même : $e^x - 1 = 0 \iff x = 0$. D'où le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variation de $f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

③ $f(x)-x=e^{-x}=\dfrac{1}{e^{x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=+\infty$

donc la droite (D) d'équation $y=x$ est $\boxed{\text{asymptote oblique}}$ à la courbe (C) de f au voisinage de $+\infty$ (et pas au voisinage de $-\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-x\right]=+\infty$)

De plus : $f(x)-x=e^{-x}>0$ pour tout x réel ; donc $\boxed{(C) \text{ est toujours située au-dessus de } (D)}$.

④ (C) et (D) à tracer.

Partie B :

① $z'=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)z=e^{-i\frac{3\pi}{4}}z$ est l'écriture complexe de la $\boxed{\text{rotation r de centre O et d'angle } \dfrac{-3\pi}{4}}$.

② On a : $\boxed{z=e^{i\frac{3\pi}{4}}z'}$ donc $x+iy=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)(x'+iy')=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x'-\dfrac{\sqrt{2}}{2}y'\right)+i\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}x'-\dfrac{\sqrt{2}}{2}y'\right)$

D'où, par unicité de l'écriture algébrique d'un nombre complexe :

$\boxed{x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x'-\dfrac{\sqrt{2}}{2}y'}$ et $\boxed{y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x'-\dfrac{\sqrt{2}}{2}y'}$.

③ $M\in(C) \iff y=f(x)=x+e^{-x}$

On a alors, selon le résultat de la question précédente : $\dfrac{\sqrt{2}}{2}x'-\cancel{\dfrac{\sqrt{2}}{2}y'}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x'-\cancel{\dfrac{\sqrt{2}}{2}y'}+e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'}$

Donc $x'\sqrt{2}=e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'}$, et par conséquent : $\ln\left(x'\sqrt{2}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x'+\dfrac{\sqrt{2}}{2}y' \iff \dfrac{\sqrt{2}}{2}y'=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x'+\ln\left(x'\sqrt{2}\right)$

En multipliant par $\sqrt{2}$, on obtient : $\boxed{y'=-x'+\sqrt{2}\ln\left(x'\sqrt{2}\right)}$.

Partie C : $g(x)=-x+\sqrt{2}\ln\left(x\sqrt{2}\right)$.

① $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=-\infty}$ car $\lim\limits_{X\to0^+}\ln X=-\infty$.

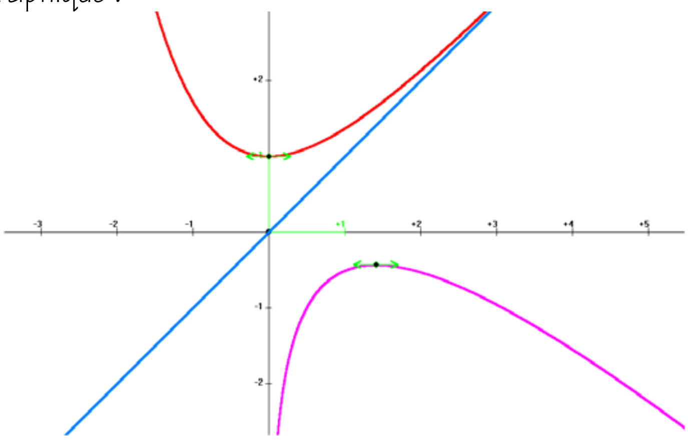
$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$: forme indéterminée. Or, $g(x)=x\left(-1+2\dfrac{\ln\left(x\sqrt{2}\right)}{x\sqrt{2}}\right)$

Selon le formulaire : $\lim\limits_{X\to+\infty}\dfrac{\ln X}{X}=0$ (croissance comparée, avec $X=x\sqrt{2}$). Donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty}$.

② $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$. Donc $g'(x)=-1+\sqrt{2}\dfrac{\sqrt{2}}{x\sqrt{2}}=-1+\dfrac{\sqrt{2}}{x}=\boxed{\dfrac{-x+\sqrt{2}}{x}}$ est du signe de $-x+\sqrt{2}$ car $x>0$.

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		+	0	−	
Variation de $g(x)$	$-\infty$	↗	$\sqrt{2}(-1+\ln 2)\approx-0,43$	↘	$-\infty$

③ Graphique :



④ Nombre de solutions de l'équation $g(x)=k$, d'inconnue x :

- aucune si $k>\sqrt{2}(-1+\ln 2)$;
- une seule si $k=\sqrt{2}(-1+\ln 2)$: c'est $x=\sqrt{2}$;
- deux si $k<\sqrt{2}(-1+\ln 2)$, dont une qui appartient à l'intervalle $]0;\sqrt{2}[$ et l'autre à $]\sqrt{2};+\infty[$.

Justification :

- dans le premier cas, utiliser le fait que le maximum de la fonction vaut $\sqrt{2}(-1+\ln 2)$;
- dans les deux autres cas, montrer que g réalise une bijection de $]0;\sqrt{2}]$ sur $]-\infty;\sqrt{2}(-1+\ln 2)]$, car dérivable et strictement monotone sur cet intervalle ; et faire de même sur $[\sqrt{2};+\infty[$.

Carl Friedrich GAUSS (Brunswick 1777 – Göttingen 1855) est surnommé « le Prince des mathématiciens ».

- A 19 ans, il découvre la constructibilité du polygone régulier à dix-sept côtés à la règle (non graduée) et au compas. Par la suite, il relie ce problème à l'étude des racines de x^p-1, où p est un nombre premier : ces racines s'expriment par une série d'équations à coefficients rationnels dont les degrés sont les diviseurs premiers de $p-1$. Il en déduit une condition nécessaire et suffisante sur n pour que le polygone régulier à n côtés soit constructible à la règle et au compas ; c'est le cas par exemple pour n = 257. Son approche trouvera un prolongement important dans le cadre de la théorie de GALOIS (1811-1832).
- Dans sa thèse, passée en 1799, il démontre le théorème fondamental de l'algèbre : « tout polynôme non constant à coefficients réels se factorise comme produit de polynômes de degré 1 ou 2 à coefficients réels » (ce qui revient à dire que tout polynôme non constant à coefficients réels admet au moins une racine dans l'ensemble des nombres complexes). Pour sa démonstration, il introduit la représentation plane des nombres complexes et propose une démarche fondée sur des considérations géométriques.
- Pour étudier la divisibilité, Gauss introduit les congruences et leur notation : $b\equiv c\,(\mathrm{mod}\,a)$, ce qui se lit : « les entiers b et c sont congrus modulo l'entier a », et signifie que a divise $b-c$.
  Il résout entre autres les équations $ax+b\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,n)$, d'inconnue x. *A méditer …*
- Il conjecture le théorème des nombres premiers : « le nombre de nombres premiers inférieurs à n est équivalent à $\dfrac{n}{\ln n}$ quand n tend vers l'infini ». Ce résultat sera démontré bien plus tard, en 1896, par Jacques HADAMARD et Charles de LA VALLEE-POUSSIN.
- Vers 1810, il se rend compte que le cinquième postulat d'Euclide : « par un point pris hors d'une droite, on ne peut mener qu'une parallèle à cette droite » est probablement indémontrable. Mais, craignant le ridicule, il ne publie pas les travaux qu'il effectue dans cette direction. La modification de ce postulat permet de bâtir de nouvelles géométries, dites non euclidiennes. Ce sera Nikolaï LOBATCHEVSKI qui franchira le pas

en 1829, en inventant la géométrie hyperbolique dans laquelle, par un point pris hors d'une droite, il passe une infinité de parallèles à cette droite.

- Gauss étudie la géométrie comme application de l'analyse : la **géométrie différentielle**. Il mène une étude systématique des courbes et surfaces au voisinage d'un point, utilisant pour cela le calcul différentiel créé par NEWTON et LEIBNIZ. On lui doit la notion de courbure (gaussienne) d'une surface.
- Anecdote célèbre : un jour, l'instituteur de sa classe propose de calculer la somme des cent premiers entiers ; remarquant que $1+100=2+99=3+98=...=50+51$, il ne faut que quelques secondes à Gauss (qui n'a pas 10 ans) pour trouver la réponse : $50\times101=5050$.
- Autre anecdote : les astronomes découvrent au début du XIX[e] siècle l'astéroïde Cérès, avant de le perdre de vue ; c'est alors que Gauss détermine par une nouvelle méthode mathématique la trajectoire la plus probable de celui-ci, et son calcul permet la redécouverte de Cérès, fin 1801.

Le célèbre **paradoxe du barbier** est l'œuvre du logicien **Bertrand RUSSELL** (1872–1970).

- Si le barbier se rase lui-même, il appartient à l'ensemble des hommes qui se rasent eux-mêmes ; mais son enseigne affirme qu'il ne rase jamais personne appartenant à cet ensemble. Par conséquent, il ne peut se raser lui-même …
- Si quelqu'un d'autre rase le barbier, celui-ci devient un homme qui ne se rase pas lui-même. Or, son enseigne dit que lui seul rase tous les hommes de cette catégorie. Par conséquent, personne d'autre ne peut raser le barbier …
- Autre exemple à méditer : CETTE PHRASE CONTIENT SEPT MOTS. *Est-ce vrai ou faux ?*

Exercice 2 (spécialistes)

Première méthode :

① Figure à faire.

② I, milieu de $[GH]$, a pour affixe $z_I=\frac{z_G+z_H}{2}=\boxed{\frac{1+z}{2}}$.

A est l'image de G par la rotation r de centre O et d'angle $\frac{-\pi}{2}$, donc $z_A=e^{-i\frac{\pi}{2}}\,z_G=-i\,z_G=\boxed{-i}$.

B est l'image de H par la rotation r' de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, donc $z_B=e^{i\frac{\pi}{2}}\,z_H=\boxed{i\,z}$.

③ a) $O=I \iff z_I=0 \iff \boxed{z=-1}$.

b) $EFGH$ étant un parallélogramme de centre O, le point E est le symétrique de G par rapport à O, donc a pour affixe $z_E=-z_G=-1$, et $F=s_O(H)$ a pour affixe $z_F=-z_H=-z$.
Si $O=I$, alors $z=-1$, donc $z_H=z_E$ et $z_F=z_G$, c'est-à-dire : $E=H$ et $F=G$.
Or, il est supposé que les points E,F,G,H ne sont pas alignés. Donc $\boxed{O\neq I}$.

c) De même : $A=B \iff -i=i\,z \iff z=-1$.
Pour la même raison que précédemment : $z\neq-1$, donc $\boxed{A\neq B}$.

④ $\dfrac{z_B - z_A}{z_I - z_O} = \dfrac{i\,z + i}{\frac{1+z}{2}} = 2i = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$

Donc $\left|\dfrac{z_B - z_A}{z_I - z_O}\right| = \dfrac{|z_B - z_A|}{|z_I - z_O|} = \dfrac{AB}{OI} = |2i| = 2$, c'est-à-dire : $\boxed{OI = \dfrac{1}{2}\,AB}$.

Et $\arg \dfrac{z_B - z_A}{z_I - z_O} \equiv mes\left(\overrightarrow{OI}\,;\overrightarrow{AB}\right) \equiv \arg(2i) \equiv \dfrac{\pi}{2}(\mathrm{mod}\,2\pi)$, c'est-à-dire : $\boxed{(OI) \perp (AB)}$.

La médiane $[OI]$ du triangle OGH est bien une hauteur de OAB.

(Noter l'importance du résultat : $O \neq I$ et $A \neq B$).

Deuxième méthode :

① $EFGH$ étant un parallélogramme de centre O, le point O est le milieu de $[GE]$, donc $\overrightarrow{GE} = 2\overrightarrow{GO}$, ce qui signifie que $\boxed{h(O) = E}$, h étant l'homothétie de centre G et de rapport 2.

I étant le milieu de $[GH]$, on a : $\overrightarrow{GH} = 2\overrightarrow{GI}$, donc $\boxed{h(I) = H}$.

② On sait que $r(G) = A$, où r est la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{-\pi}{2}$,

donc $OA = OG$ et $mes\left(\overrightarrow{OG}\,;\overrightarrow{OA}\right) \equiv \dfrac{-\pi}{2}(\mathrm{mod}\,2\pi)$.

Or, $EFGH$ est un parallélogramme de centre O, donc O est le milieu de $[GE]$,

ce qui signifie que $OE = OG$ et $mes\left(\overrightarrow{OE}\,;\overrightarrow{OG}\right) \equiv \pi(\mathrm{mod}\,2\pi)$.

D'où : $mes\left(\overrightarrow{OE}\,;\overrightarrow{OA}\right) \equiv mes\left(\overrightarrow{OE}\,;\overrightarrow{OG}\right) + mes\left(\overrightarrow{OG}\,;\overrightarrow{OA}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}(\mathrm{mod}\,2\pi)$, et $OA = OG = OE$.

Ce qui signifie que $\boxed{r'(E) = A}$, où r' est la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

③ Propriété : par une homothétie, l'image d'une droite (D) est une droite (D') parallèle à (D).

Autre propriété : une homothétie multiplie les longueurs par la valeur absolue de son rapport.

$h(O) = E$ et $h(I) = H$, donc $\boxed{(EH)//(OI)}$ et $\boxed{EH = 2\,OI}$.

Propriétés : par une rotation, l'image d'une droite est une droite formant avec la précédente un angle égal à celui de la rotation ; une rotation conserve les longueurs (c'est une isométrie).

$r'(E) = A$ et $r'(H) = B$, donc $\boxed{(AB) \perp (EH)}$ [plus précisément : $mes\left(\overrightarrow{EH}\,;\overrightarrow{AB}\right) \equiv +\dfrac{\pi}{2}(\mathrm{mod}\,2\pi)$]

et $\boxed{AB = EH}$. D'où finalement : $\boxed{(AB) \perp (OI)}$ et $\boxed{AB = 2\,OI}$.