ENONCE :

1. Justifier, pour tout entier naturel n , l'existence de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}dx$

   On pose alors $u_n = 2\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}dx$.

   On ne cherchera pas à calculer u_n.

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$0 \leqslant u_n \text{ et } u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1};$$

3. Calculer u_0. En déduire la valeur de u_1, puis celle de u_2.
4. Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

   En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.

Eléments de correction

1. Notons f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^{2n+1}}{1+x^2}$

f est une fonction rationnelle définie et continue sur $\mathbb{R}$

$(1+x^2 \neq 0)$ donc $\int_0^1 f(x)\,dx$ existe.

2. $u_n = 2\int_0^1 f(x)\,dx$

On a $f(x) \geqslant 0$ et $0 \leqslant 1$ donc $\int_0^1 f(x)\,dx \geqslant 0$

(positivité de l'intégrale)

donc $u_n \geqslant 0$.

$$u_{n+1} + u_n = 2 \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{1+x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}\,dx.$$

$$= 2\int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{1+x^2} + \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}\,dx \quad \text{linéarité}$$

$$= 2\int_0^1 \frac{x^{2n+1}(x^2+1)}{1+x^2}\,dx = 2\int_0^1 x^{2n+1}\,dx$$

$$= 2\left[\frac{x^{2n+2}}{2n+2}\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{2n+2} - 0\right) = \boxed{\frac{1}{n+1}}.$$

3. $u_0 = 2\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \left[\ln(1+x^2)\right]_0^1$

$\boxed{u_0 = \ln 2}$

$u_1 + u_0 = 1$ (car $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$ pour tout n)

donc $\boxed{u_1 = 1 - \ln 2}$

$u_2 + u_1 = \frac{1}{2}$ donc $\boxed{u_2 = \ln 2 - \frac{1}{2}}$

4. $u_n - u_{n+1} = 2\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{1+x^2}\,dx - 2\int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{1+x^2}\,dx$

$= 2\int_0^1 \frac{x^{2n+1} - x^{2n+3}}{1+x^2}\,dx = 2\int_0^1 \frac{x^{2n+1}(1-x^2)}{1+x^2}\,dx$

Notons $g(x) = \frac{x^{2n+1}(1-x^2)}{1+x^2}$

$x^{2n+1} \geqslant 0$ $\quad 1+x^2 > 0$ $\quad 1-x^2 \geqslant 0$ (polynome du second degré Signe de $-a$ entre les racines -1 et 1)

donc $g(x) \geqslant 0$

et $\int_0^1 g(x)\,dx \geqslant 0$ (positivité de l'intégrale) donc $u_n \leq u_{n+1}$

(u_n) est décroissante

5. On a $u_n \geqslant 0$ (voir 2.)

$\frac{1}{n+1} - u_n = u_{n+1}$ donc $\frac{1}{n+1} - u_n \geqslant 0$ car $u_{n+1} \geqslant 0$.

donc $\boxed{0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}}$

$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$ car $\lim_{n\to+\infty} 0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

(théorème des Gendarmes)