ENONCE :

Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = \sqrt{3U_n + 4}$.

1°) a) Montrer que la suite (U_n) est majorée par 4.
b) Montrer que (U_n) est strictement croissante.
c) En déduire que (U_n) converge, et déterminer sa limite.

2°) a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $4 - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - U_n)$.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $4 - U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (4 - U_0)$.

c) Retrouver alors le résultat de la question 1-c).

ELEMENTS DE CORRECTION

Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = \sqrt{3U_n + 4}$.

1°) a) Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n \leq 4$.

Considérons la propriété : $\mathscr{P}_n$: « $U_n \leq 4$ » .

- $\mathscr{P}_0$ est vraie car $U_0 = 1 \leq 4$.
- Supposons que $\mathscr{P}_p$ soit vraie pour un entier naturel p . Alors $U_p \leq 4$.

  Donc $3U_p \leq 12$ et $3U_p + 4 \leq 16$; on a alors $\sqrt{3U_p + 4} \leq 4$, et donc $U_{p+1} \leq 4$

  $\mathscr{P}_{p+1}$ est donc vraie. <u>La propriété est héréditaire</u>.

CONCLUSION : Pour tout entier naturel n , $\mathscr{P}_n$ est vraie donc pour tout n , $U_n \leq 4$.

<u>La suite (U_n) est majorée par 4</u>.

b) Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} \geq U_n$.

Considérons la propriété : $\mathscr{P}_n$: « $U_{n+1} \geq U_n$ » .

- $\mathscr{P}_0$ est vraie car $U_1 = \sqrt{7} \geq U_0 = 1$.
- Supposons que $\mathscr{P}_p$ soit vraie pour un entier naturel p . Alors $U_{p+1} \geq U_p$.

  Donc $3U_{p+1} \geq 3U_p$ et $3U_{p+1} + 4 \geq 3U_p + 4$; on a alors $\sqrt{3U_{p+1} + 4} \geq \sqrt{3U_p + 4}$

  et donc $U_{p+2} \geq U_{p+1}$. $\mathscr{P}_{p+1}$ est donc vraie. <u>La propriété est héréditaire</u>.

CONCLUSION : Pour tout entier naturel n , $\mathscr{P}_n$ est vraie donc pour tout n , $U_{n+1} \geq U_n$.

<u>La suite (U_n) est strictement croissante</u>.

c) (U_n) est donc croissante et majorée, elle est donc convergente.
(*Théorème : toute suite croissante et majorée converge*). Notons l sa limite ;

Nous avons l'égalité : $U_{n+1} = \sqrt{3U_n + 4}$;

$\lim_{n \to +\infty} U_n = l$ et donc $\lim_{n \to +\infty} U_{n+1} = l$;

De plus $\sqrt{3U_n + 4} = f(U_n)$ avec f fonction définie et continue sur IR par : $f(x) = \sqrt{3x+4}$.

La suite $(f(U_n))$ admet donc une limite égale à $f(l)$, autrement dit : $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{3U_n + 4} = \sqrt{3l+4}$

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I ,
et (U_n) une suite de points de I de limite ℓ, $\ell \in$ I ,
alors : la suite $(f(U_n))$ tend vers $f(\ell)$.

Par passage à la limite, nous obtenons : $\lim_{n \to +\infty} U_{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{3U_n + 4}$, donc $l = \sqrt{3l+4}$.
Cela conduit à $l^2 = 3l + 4$ donc à $l^2 - 3l - 4 = 0$.
Cette équation du second degré possède 2 solutions $l = 4$ ou $l = -1$.
Or la suite étant croissante, elle est minorée par son premier terme, donc par 1.
Donc, pour tout entier naturel n, $U_n \geq 1$, et donc $\lim_{n \to +\infty} U_n = l \geq 1$.

Finalement, $\boxed{l = 4}$. **(U$_n$) converge vers 4.**

2°) a) $$4 - U_{n+1} = 4 - \sqrt{3U_n + 4} = \frac{\left(4 - \sqrt{3U_n+4}\right)\left(4 + \sqrt{3U_n+4}\right)}{4 + \sqrt{3U_n + 4}} = \frac{16 - (3U_n + 4)}{4 + \sqrt{3U_n+4}} = \frac{12 - 3U_n}{4 + \sqrt{3U_n + 4}}$$

donc $4 - U_{n+1} = \dfrac{3}{4 + \sqrt{3U_n + 4}} \times (4 - U_n)$.

Or $U_n \geq 0$ (car $U_n \geq 1$) donc $3U_n + 4 \geq 4$ et donc $\sqrt{3U_n+4} \geq 2$

soit encore $4 + \sqrt{3U_n + 4} \geq 6$;

Nous obtenons ensuite $\dfrac{1}{4 + \sqrt{3U_n+4}} \leq \dfrac{1}{6}$ et $\dfrac{3}{4 + \sqrt{3U_n + 4}} \leq \dfrac{1}{2}$.

Enfin, comme $4 - U_n \geq 0$, on peut écrire : $\dfrac{3}{4 + \sqrt{3U_n+4}} \times (4 - U_n) \leq \dfrac{1}{2}(4 - U_n)$ et donc :

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n\text{, on a : } 4 - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - U_n)}.$$

b) Un raisonnement par récurrence et l'utilisation de la question précédente permettent de prouver que : pour tout entier naturel n, on a : $4 - U_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n (4 - U_0)$.

c) On a donc $0 \leq 4 - U_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \times 3$.

Or $\lim_{n \to +\infty} 0 = 0 = \lim_{n \to +\infty} 3\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ (*car* $\lim_{n \to +\infty} q^n = 0$ *si* $-1 < q < 1$)

Donc, d'après le théorème des Gendarmes, $\lim_{n \to +\infty} (4 - U_n) = 0$ et donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} U_n = 4}$