ENONCE :

BAC S - PONDICHERY – 1998

1°) On dispose d'une urne U_1 contenant trois boules rouges et sept boules noires.
On extrait simultanément deux boules de cette urne ; on considère que tous les tirages sont équiprobables.

a. Quelle est la probabilité p_1 que les deux boules tirées soient rouges?

b. Quelle est la probabilité p_2 que les deux boules tirées soient noires?

c. Quelle est la probabilité p_3 que les deux boules tirées soient de même couleur?

d. Quelle est la probabilité p_4 que les deux boules tirées soient de couleurs différentes ?

2°) On dispose aussi d'une deuxième urne U_2 contenant quatre boules rouges et six boules noires.

On tire maintenant deux boules de l'urne U_1 et une boule de l'urne U_2 ;

On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

On considère les événements suivants :

R : « Les boules tirées sont rouges » ;
D : « Les trois boules tirées ne sont pas toutes de la même couleur » ;
B : « La boule tirée dans l'urne U_2 est rouge ».

a. Calculer la probabilité de l'évènement R.

b. Quelle est la probabilité de tirer trois boules de même couleur ?

c. Calculer la probabilité conditionnelle $p_D(B)$, probabilité de l'événement B sachant que l'événement D est réalisé.

On donnera tous les résultats sous forme de fraction irréductible.

Eléments de correction

1°) Nous sommes dans une situation d'équiprobabilité, ce qui permet d'écrire :

a) $p_1 = \dfrac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}} = \dfrac{3}{45} = \boxed{\dfrac{1}{15}}$.

b) $p_2 = \dfrac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} = \dfrac{21}{45} = \boxed{\dfrac{7}{15}}$

c) Soit les deux boules tirées sont rouges, soit les deux boules tirées sont noires,

donc $p_3 = p_1 + p_2 = \boxed{\dfrac{8}{15}}$

d) On reconnaît l'évènement contraire du précédent : $p_4 = 1 - p_3 = \boxed{\dfrac{7}{15}}$

2°) On tire une boule rouge dans U_1 et une rouge dans U_2 de manière simultanée, donc :

a) $p\,(\,R\,) = \dfrac{\binom{3}{2} \times \binom{4}{1}}{\binom{10}{2} \times \binom{10}{1}} = \boxed{\dfrac{2}{75}}$

b) Cet évènement C est la réunion des évènements incompatibles " les trois boules tirées sont rouges " avec " les trois boules tirées sont noires ". On a donc $p\,(\,C\,) = \dfrac{\binom{7}{2} \times \binom{6}{1}}{\binom{10}{2} \times \binom{10}{1}} + p\,(R) = \dfrac{23}{75}$ $\boxed{}$

c) $p_D(B) = \dfrac{p(B \cap D)}{p(D)}$

Commençons par calculer la probabilité de l'évènement D, qui est le complémentaire de l'évènement C : $p\,(\,D) = 1 - p\,(C) = \boxed{\dfrac{52}{75}}$

Recherchons maintenant la probabilité de l'évènement B⊓D.
Comme l'on sait que toutes les boules tirées ne sont pas de la même couleur, on peut donc dire que cet évènement est la réunion des évènements :

D_1 : " On a tiré deux boules noires dans U_1 et une boule rouge dans U_2 "
et D_2 : " On a tiré une boule rouge et une boule noire dans U_1 ainsi qu'une boule rouge dans U_2".

On a : $p\,(\,D_1\,) = \dfrac{\binom{7}{2} \times \binom{4}{1}}{\binom{10}{2} \times \binom{10}{1}} = \dfrac{14}{75}$ et $p\,(\,D_2\,) = \dfrac{\binom{3}{1} \times \binom{7}{1} \times \binom{4}{1}}{\binom{10}{2} \times \binom{10}{1}} = \dfrac{14}{75}$

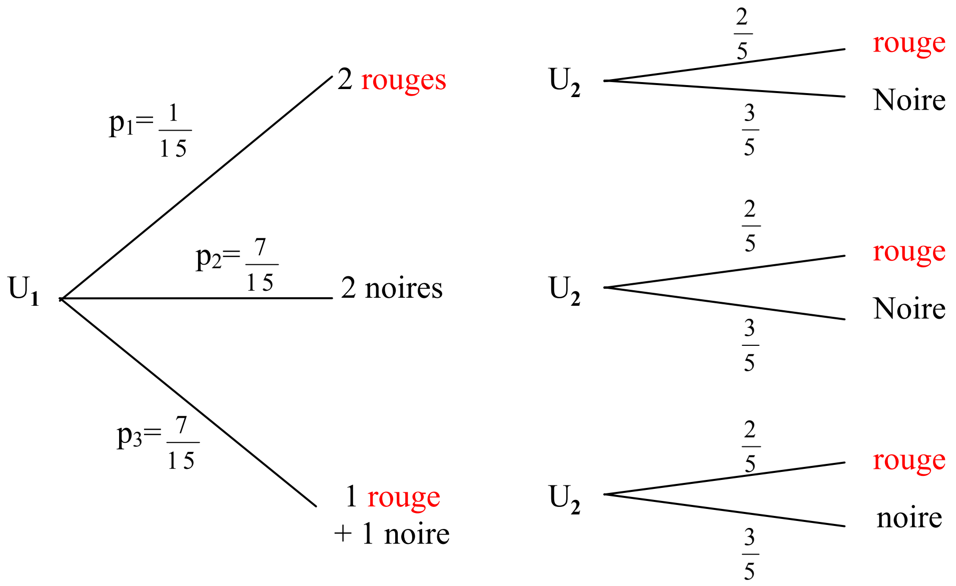
Comme les évènements D_1 et D_2 sont incompatibles, on en déduit :

$p\,(\,B \cap D\,) = p\,(\,D_1\,) + p\,(\,D_2\,) = \boxed{\dfrac{28}{75}}$

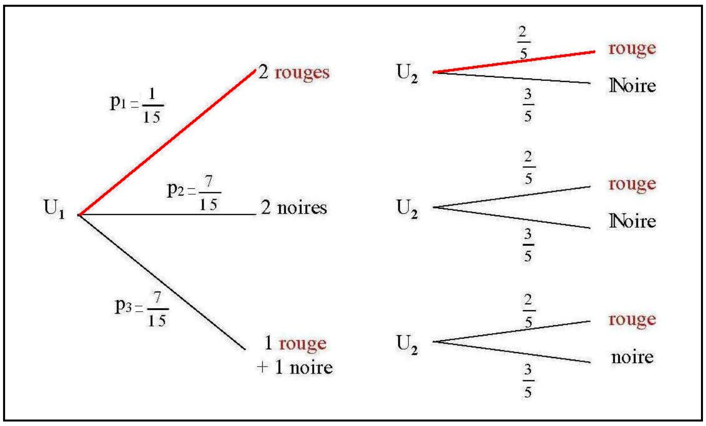
Pour conclure : $p_D(B) = \dfrac{\frac{28}{75}}{\frac{52}{75}} = \dfrac{28}{52} = \boxed{\dfrac{7}{13}}$

2^{e} méthode pour la question 2 :

Arbre adapté à la situation :

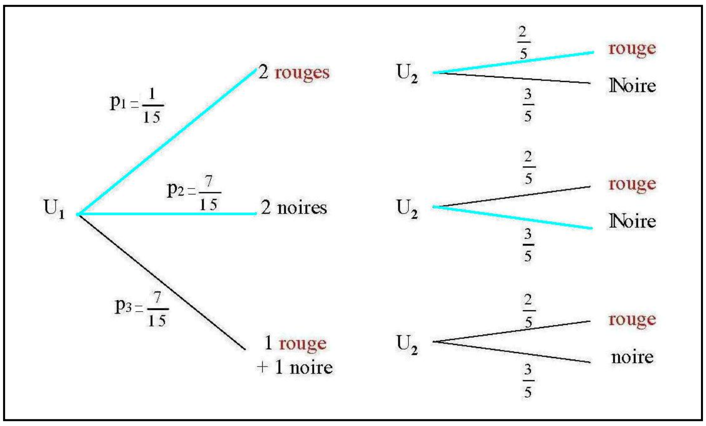


a) $p(R) = \frac{1}{15} \times \frac{2}{5} = \boxed{\frac{2}{75}}$ *chemin rouge*



b) $p(C) = \frac{1}{15} \times \frac{2}{5} + \frac{7}{15} \times \frac{3}{5} = \boxed{\frac{23}{75}}$

chemin bleu

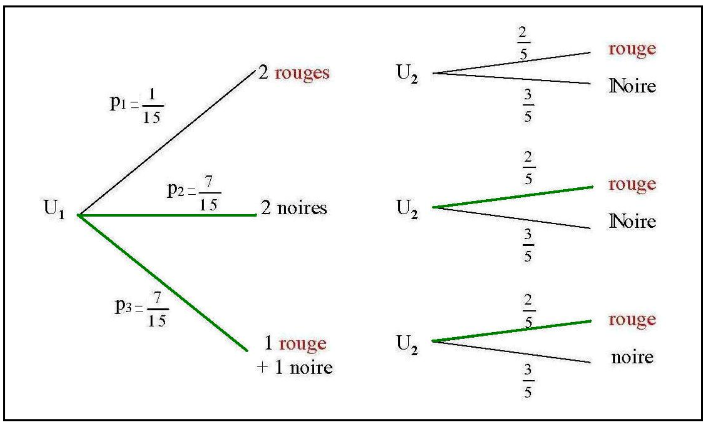


c) $p_D(B) = \frac{p(B \cap D)}{p(D)}$

$p(D) = 1 - p(C) = \frac{52}{75}$

$p(B \cap D) = \frac{7}{15} \times \frac{2}{5} + \frac{7}{15} \times \frac{2}{5} = \frac{28}{75}$

chemin vert



Pour conclure : $p_D(B) = \frac{\frac{28}{75}}{\frac{52}{75}} = \frac{28}{52} = \boxed{\frac{7}{13}}$