série S	BAC BLANC	MATHEMATIQUES	29 mars 2001

Coeff. : 7 *ou* 9
Durée : 4 H

La qualité de la rédaction , la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies .
L'utilisation d'une calculatrice et du formulaire officiel de mathématiques est autorisée .

EXERCICE I (5 points)

Une urne A contient 2 boules rouges et 3 boules noires, une urne B contient 3 boules rouges et 2 boules noires .
On tire au hasard une boule de l'urne A :

- si elle est noire , on la place dans l'urne B ,
- sinon , on l'écarte du jeu .

On tire au hasard ensuite une boule de l'urne B .
On considère les événements suivants :

R_1 **: « la boule tirée de A est rouge »**
R_2 **: « la boule tirée de B est rouge »**

N_1 **: « la boule tirée de A est noire »**
N_2 **: « la boule tirée de B est noire »**

1) a) Déterminer les probabilités des événements R_1 et N_1 .
b) Calculer les probabilités des événements « R_2 sachant R_1 » et « R_2 sachant N_1 » .
En déduire que la probabilité de R_2 est de $\dfrac{27}{50}$.
c) Calculer la probabilité de N_2 .

2) On répète n fois l'épreuve précédente (*tirage d'une boule de A , suivi du tirage d'une boule de B dans les mêmes conditions initiales indiquées ci-dessus*) , en supposant les différentes épreuves indépendantes .
Quel nombre minimum d'essais doit-on effectuer pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois une boule
rouge de l'urne B soit supérieure à 0,99 ?

EXERCICE II (4 points) - Enseignement obligatoire

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 2 cm .

1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) $z^3 - 8 = 0$.

2) On considère dans le plan $\mathcal{P}$ les points A , B et C d'affixes respectives :
$z_A = -1 + i\sqrt{3}$, $z_B = 2$ et $z_C = -1 - i\sqrt{3}$.
   a) Ecrire z_A et z_C sous la forme trigonométrique .
   b) Placer les points A , B et C .
   c) Déterminer la nature du triangle ABC .

3) On considère l'application f du plan dans lui-même qui ,
à tout point M d'affixe z associe le point M ' d'affixe z ' telle que : $z' = e^{2i\frac{\pi}{3}} z$.
   a) Caractériser géométriquement l'application f .
   b) Déterminer les images des points A et C par f .
   En déduire l'image de la droite (AC) par f .

EXERCICE II (4 points) - Enseignement de spécialité

1) Démontrer que , pour tout entier naturel n : $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7 *(On pourra utiliser un raisonnement par récurrence*) .
En déduire que $2^{3n+1} - 2$ est un multiple de 7 et que $2^{3n+2} - 4$ est un multiple de 7 .

2) Déterminer les restes de la division par 7 des puissances de 2 .

3) Le nombre p étant un entier naturel , on considère le nombre entier $A_p = 2^p + 2^{2p} + 2^{3p}$.
   a) Si $p = 3n$, quel est le reste de la division de A_p par 7 ?
   b) Démontrer que si $p = 3n + 1$, alors A_p est divisible par 7 .
   c) Etudier le cas où $p = 3n + 2$.

4) On considère les nombres entiers a et b écrits dans le système binaire :
$a = \overline{1001001000}$ et $b = \overline{1000100010000}$.
Vérifier que ces deux nombres sont des nombres de la forme A_p . Sont-ils divisibles par 7 ?

PROBLEME (11 points)

PARTIE A

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = x - e^{2x-2}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$;
(*On prendra 5 cm comme unité*)

1) a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

b) Vérifier que , pour tout réel x non nul : $f(x) = x\left[1 - 2e^{-2}\left(\dfrac{e^{2x}}{2x}\right)\right]$. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2) a) Déterminer f ’. Etudier le signe de $f'(x)$.

b) Dresser le tableau de variations de f . On précisera la valeur exacte du maximum de f .

3) Démontrer que la droite (D) d’équation $y = x$ est asymptote à la courbe (C) .

Etudier la position relative de (C) et (D) .

4) On note A le point de la courbe (C) d’abscisse 1 .

Déterminer une équation de la tangente (T) en A à la courbe (C) .

5) a) On note I l’intervalle [0 ; 0,5] .

Démontrer que l’équation $f(x) = 0$ admet dans l’intervalle I une unique solution qu’on notera a .

b) Déterminer un encadrement de a d’amplitude 10^{-1}.

6) Construire la courbe (C) , l’asymptote (D) et la tangente (T) .

PARTIE B

***Attention**, la question 4 n’est plus au programme de TS ;*
Le reste de cette partie peut être abordée néanmoins.

On définit dans IR la suite (U_n) par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = e^{2U_n - 2} \end{cases}$.

1) Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = e^{2x-2}$.

Démontrer que l’équation $f(x) = 0$ est équivalente à $g(x) = x$. En déduire $g(a)$.

2) Démontrer que , pour tout réel x de l’intervalle I , on a : $|g'(x)| \leq \dfrac{2}{e}$.

3) Démontrer que , pour tout réel x de l’intervalle I , $g(x)$ appartient à I .

4) Utiliser l’inégalité des accroissements finis pour démontrer que , pour tout entier naturel n :

$$|U_{n+1} - a| \leq \frac{2}{e}|U_n - a|.$$

5) Démontrer , par récurrence ou par une autre méthode de votre choix , que : $|U_n - a| \leq \left(\dfrac{2}{e}\right)^n$.

6) En déduire que la suite (U_n) converge et donner sa limite .

7) Déterminer un entier naturel p tel que : $|U_p - a| < 10^{-5}$.

8) En déduire une valeur approchée de a à 10^{-5} près .