

ENONCE :

Calculer la valeur moyenne de la fonction $x \mapsto \sin^2 x$ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$.

Rappels :

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a \quad \text{et} \quad \sin 2a = 2\cos a \sin a.$$

On appelle valeur moyenne de f sur $[a, b]$ le nombre :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Éléments de correction

La valeur moyenne de la fonction $x \mapsto \sin^2 x$ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ est :

$$\mu = \frac{1}{\frac{\pi}{4} - 0} \int_0^{\pi/4} \sin^2 t dt = \frac{1}{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\pi/4} \frac{1}{2} (1 - \cos 2t) dt = \frac{4}{\pi} \times \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} (1 - \cos 2t) dt$$

$$\mu = \frac{2}{\pi} \left[t - \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\pi/4} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \sin 2 \frac{\pi}{4} - 0 \right) = \frac{2}{\pi} \times \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} \right) = \frac{2}{\pi} \times \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}$$

$$\mu = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}$$