

EXERCICE I

Calculons les différentes aires en centimètres carrés :

- Aire du carré : 400
- Aire de D : π
- Aire de D' : 81π
- Aire de chaque secteur S_k : $\frac{81\pi - \pi}{8} = 10\pi$
- Aire de R : $400 - 81\pi$

1. (a) La probabilité d'atteindre D est donc donnée par le rapport des aires de D et du carré :

$$p(D) = \frac{\pi}{400} \simeq 0,007853$$

De même, la probabilité d'atteindre S_1 est donnée par le rapport de l'aire de S_1 sur l'aire du carré :

$$p(S_1) = \frac{10\pi}{400} = \frac{\pi}{40} \simeq 0,0785$$

On remarque que les probabilités d'atteindre un secteur S_k sont toutes égales.

- (b) On trouve de même :

$$p(R) = \frac{400 - 81\pi}{400} \simeq 0,364$$

valeur que l'on pouvait aussi obtenir en sachant que la somme des probabilités fait 1, donc

$$p(R) = 1 - (p(D) + 8 \times p(S_1))$$

L'espérance de X est donnée par la formule :

$$E(X) = 10 \times p(D) + p(S_1) \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) - 4 \times p(R) \simeq 1,45$$

2. (a) Cherchons les cas où l'on obtient un gain strictement négatif. Cela se produit uniquement dans les cas suivants : (R, R) , (S_1, R) , (S_2, R) , (S_3, R) , (R, S_1) , (R, S_2) et (R, S_3) , en notant dans les couples précédents à la première place la cible atteinte lors du premier jeu, et à la deuxième place la cible atteinte lors du deuxième jeu. On calcule ensuite la probabilité de ces événements, sachant qu'ils sont indépendants :

$$\begin{aligned} p(R, R) &= p(R) \times p(R) = p(R)^2 \\ p(S_1, R) &= p(R, S_1) = p(R) \times p(S_1) \end{aligned}$$

Les autres probabilités sont toutes égales :

$$p(S_1, R) = p(S_2, R) = p(S_3, R) = p(R, S_1) = p(R, S_2) = p(R, S_3)$$

On en déduit donc que la probabilité p_n d'obtenir un gain strictement négatif est donc égale à :

$$p_n = p(R)^2 + 6p(S_1, R) \simeq 0,304$$

En utilisant l'événement contraire, on trouve alors pour la probabilité p_p d'obtenir un gain total positif ou nul :

$$p_p = 1 - p_n \simeq 0,696$$

- (c) On commence par calculer la probabilité de l'événement contraire $\bar{D}$, c'est à dire la probabilité de n'avoir aucun point placé dans le disque D . Si on joue n fois de suite, on entre dans le cas d'un schéma de Bernouilli, et donc la probabilité de n'avoir aucun point placé dans D sur ces n lancers est égale à :

$$p(\bar{D})^n = (1 - p(D))^n$$

L'événement " obtenir au moins un point placé dans le disque D " étant l'événement contraire du précédent, on a :

$$p_n = 1 - (1 - p(D))^n \simeq 1 - 0,992^n$$

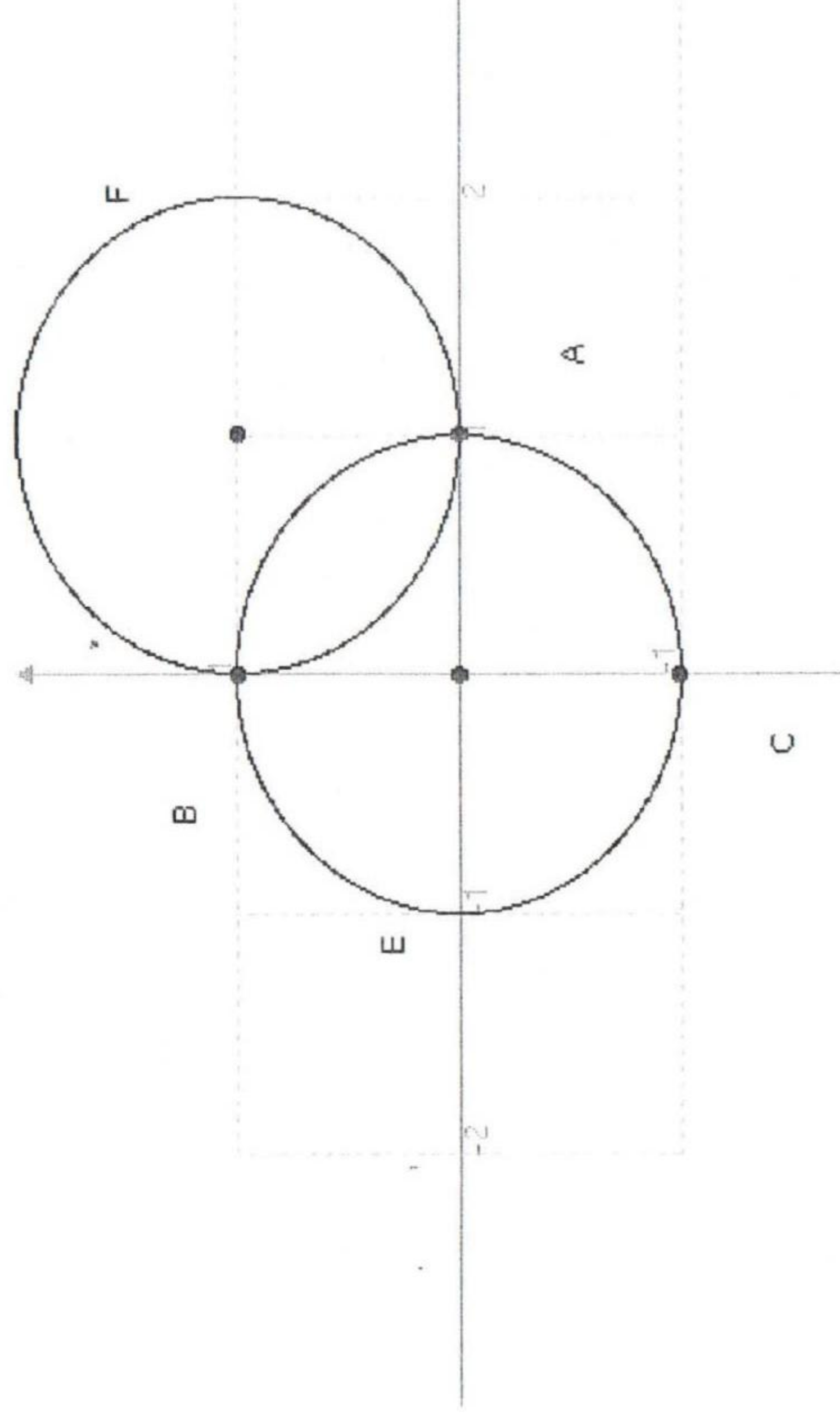
Il reste à résoudre l'inéquation correspondante :

$$p_n \geq 0,9 \Leftrightarrow 1 \geq 0,992^n \Leftrightarrow \ln 0,1 \geq n \ln 0,992 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,1}{\ln 0,992} \simeq 286,6$$

donc la plus petite valeur de n tel que $p_n \geq 0,9$ est égale à 287.

EXERCICE II

1. (a) On remplace z par $-i$ et on trouve que l'affixe du point C' est égale à 2.
(b) Le graphique complété avec les questions suivantes est :



2. Soit $z = x + iy$, où x et y désignent deux nombres réels.

(a) On multiplie par le conjugué du dénominateur et on développe :

$$Z = \frac{(1-i)(x+iy-1)((x-1)-iy)}{((x-1)+iy)((x-1)-iy)} = \frac{(x-1)^2 + (y-1)^2 - 1}{(x-1)^2 + y^2} - \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x-1)^2 + y^2} i$$

(b) Z est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle, ce qui équivaut à $z \neq 1$ et $x^2 + y^2 = 1$. L'ensemble E des points M d'affixe z telle que Z soit réel est donc le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point A .

(c) $Re(Z)$ est négatif ou nul si et seulement si $z \neq 1$ et

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1$$

On reconnaît le disque de centre $\Omega(1, 1)$ et de rayon 1, privé du point A .

3. (a) On a

$$1-i = \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})) = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

(b) Remarquons que modulo 2π , on peut écrire :

$$\arg\left(\frac{(1-i)(z-i)}{z-1}\right) = \arg(1-i) + \arg\left(\frac{z-i}{z-1}\right) = -\frac{\pi}{4} + (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$$

Or, la condition :

$$\frac{(1-i)(z-i)}{z-1} \in R^* \Leftrightarrow \arg\left(\frac{(1-i)(z-i)}{z-1}\right) = k\pi$$

où k est un entier relatif, et ceci pour z différent de 1 et de i . On en déduit :

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

(c) D'après la question précédente, l'ensemble des points M vérifiant

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

est donc l'ensemble des points M distincts de A et de B tels que

$$\frac{(1-i)(z-i)}{z-1} \in R^*$$

c'est à dire l'ensemble des points M d'affixe z tels que Z soit un réel non nul. D'après la question 2) (b), cet ensemble est le cercle de centre O et de rayon 1 privé des points A et B .

(d) En reprenant le résultat précédent, on trouve que

$$\arg Z = 2k\pi \Leftrightarrow Z \in \mathbb{R}_+^*$$

Z est donc réel, et sa partie réelle doit être strictement positive, ce qui se traduit par :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 > 1 \end{cases}$$

On reconnaît donc l'intersection du cercle unité avec l'extérieur du disque de centre Ω et de rayon 1, privé des points A et B , soit le grand arc de cercle AB privé de A et B , dessiné sur le cercle unité.

PROBLEME

PARTIE A

1. On a les inégalités suivantes :

$$x > 0 \Rightarrow 2x > 0 \Rightarrow e^{2x} > e^0 \Rightarrow e^{2x} > 1 \Rightarrow e^{2x} - 1 > 0$$

2. On remarque que l'inégalité précédente justifie l'existence de g sur $]0, +\infty[$, puisque le dénominateur ne s'annule jamais sur l'intervalle choisi. On a :

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{2x} - 1 = 0^+, \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} - 1 = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0.$$

Les droites d'équations $x = 0$ et $y = 0$ sont donc asymptotes à la courbe représentative de g .

(b) On a :

$$g'(x) = -\frac{2e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2} < 0$$

donc g est décroissante strictement sur $]0, +\infty[$.

PARTIE B

1. (a) En appliquant les formules de dérivation :

$$f'(x) = 2[a(\ln x)^2 + b \ln x + c] + 2x \left[a \frac{2 \ln x}{x} + \frac{b}{x} \right] = 2a(\ln x)^2 + (2b + 4a) \ln x + (2c + 2b)$$

(b) On lit facilement :

$$f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0 \quad f'(\sqrt{e}) = 0 \quad f'(e) = \frac{0 - 2e}{\frac{e}{2} - e} = 4$$

(c) Comme $f'\left(\frac{1}{e}\right) = -2a + 2c$ et $f'(\sqrt{e}) = \frac{5}{2}a + 3b + 2c$ et $f'(e) = 6a + 4b + 2c$, on peut trouver les valeurs de a , b et c en résolvant le système d'équations :

$$\begin{cases} -2a + 2c = 0 \\ \frac{5}{2}a + 3b + 2c = 0 \\ 6a + 4b + 2c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \\ c = 2 \end{cases}$$

On retrouve bien l'expression demandée pour $f(x)$.

2. (a) Le changement de variable indiqué équivaut sur $]0, +\infty[$ à $x = e^{-t}$. Donc

$$f(x) = 2e^{-t} [2t^2 + 3t + 2] = 4t^2 e^{-t} + 6t e^{-t} + 4e^{-t}$$

Quand x tend vers 0, t tend vers $+\infty$. Comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^n e^{-t} = 0$, on en déduit que la limite de f en 0 est égale à 0.

(b) Pour $x > 1$, la factorisation suivante :

$$f(x) = 2x(\ln x) \left[2(\ln x) - 3 + \frac{2}{\ln x} \right]$$

et le fait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ prouve que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

(c) En utilisant les résultats de la question 1) (a) de cette partie, on a :

$$f'(x) = 4(\ln x)^2 + 2 \ln x - 2$$

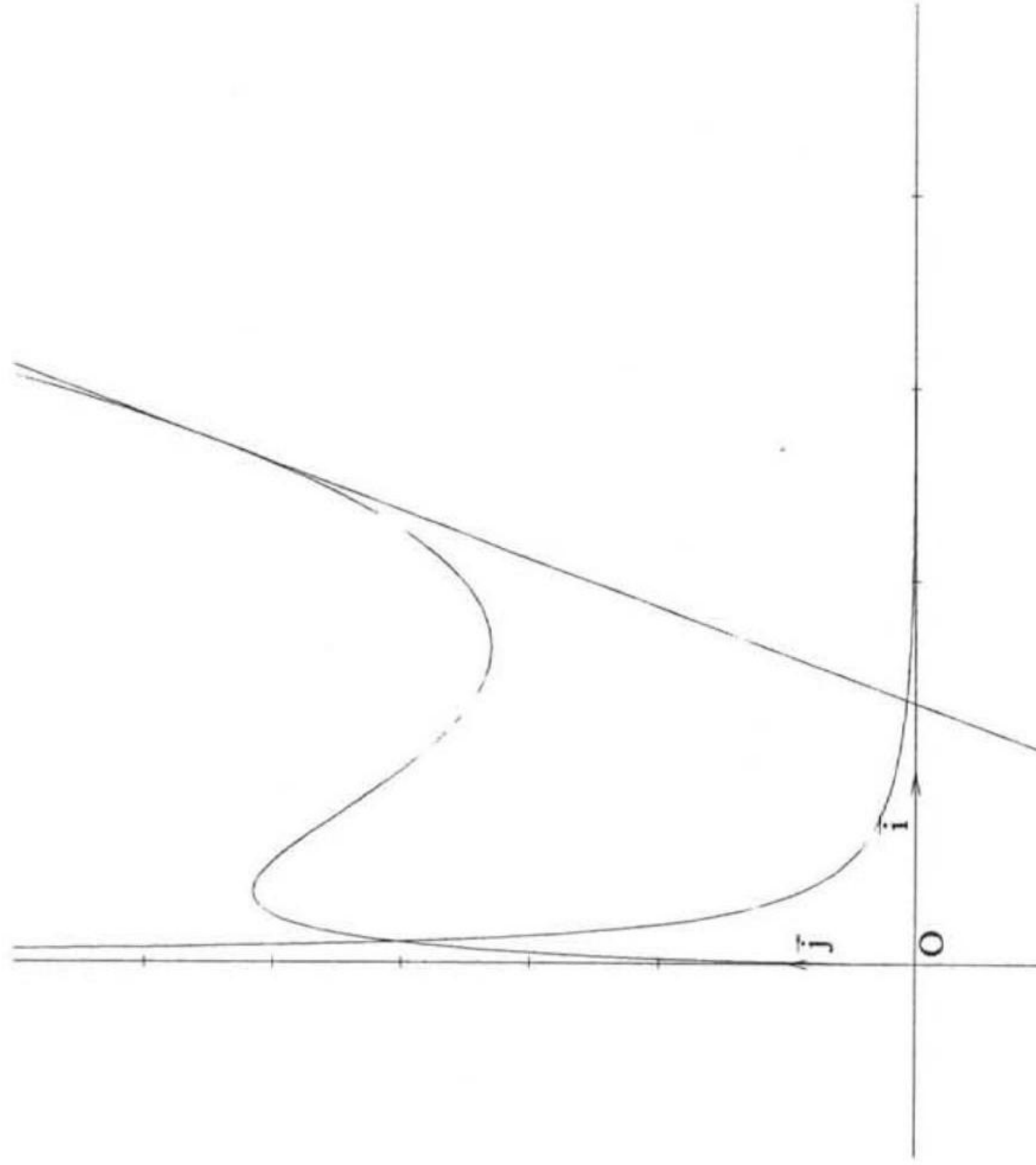
Il suffit de développer l'expression $2(\ln x + 1)(2 \ln x - 1)$ pour établir l'égalité demandée.

(d) On étudie donc le signe de chacun des facteurs :

x	0	$\frac{1}{e}$	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$\ln x + 1$	-	0	+	+
$2 \ln x - 1$	-	-	0	+
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	0	$\frac{14}{e}$	$2\sqrt{e}$	$+\infty$

PARTIE C

1. On trouve :



2. (a) Il suffit de réduire au même dénominateur :

$$\frac{e^{2x}}{e^{2x}-1} - 1 = \frac{1}{e^{2x}-1} = g(x)$$

- (b) La fonction g étant à valeurs positive sur $[\frac{1}{4}, 1]$, l'aire demandée est égale à :

$$A = \int_{\frac{1}{4}}^2 g(x) dx = \int_{\frac{1}{4}}^2 \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1} - 1 dx = \left[\frac{\ln(e^{2x}-1)}{2} - x \right]_{\frac{1}{4}}^2 = \frac{\ln(e^4-1) - \ln(\sqrt{e}-1)}{2} - \frac{7}{4}$$

3. (a) On remarque que sur $[0, 1; 0, 3]$ on a $f'(x) > 0$ et $g'(x) < 0$ car $\frac{1}{e} \simeq 0,36 > 0,3$.

Donc pour tout x appartenant à $[0, 1; 0, 3]$, on a $\varphi'(x) > 0$.

- (b) L'équation $f(x) = g(x)$ équivaut à $\varphi(x) = 0$. La fonction φ est continue, strictement croissante sur $[0, 1; 0, 3]$ et $\varphi(0, 1)$ et $\varphi(0, 3)$ sont de signe contraires.

Donc l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution α sur cet intervalle. On trouve $0,11 < \alpha < 0,12$.

PARTIE D

1. Avec le tableau de variations de f , on vérifie que f est strictement croissante sur $]0, \frac{1}{e}[$ et comme $f(0) = 0$, on peut en déduire que $f(x) > 0$ sur cet intervalle. Il suffit ensuite de dire que f admet un minimum qui vaut $2\sqrt{e}$ sur $[\frac{1}{e}, +\infty[$ pour conclure que pour tout $x > 0$, $f(x) > 0$.

2. (a) On applique le théorème de composition des limites :

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{X \rightarrow 0} g(X) = +\infty \quad \lim_{X \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} g(X) = 0$$

- (b) On applique le théorème de composition des sens de variations :

Si $x \in]0, \frac{1}{e}[$	f est croissante	g est décroissante	$g \circ f$ est décroissante
Si $x \in]\frac{1}{e}, \sqrt{e}[$	f est décroissante	g est décroissante	$g \circ f$ est croissante
Si $x \in]\sqrt{e}, +\infty[$	f est croissante	g est décroissante	$g \circ f$ est décroissante

- (c) f est croissante sur $]0, \frac{1}{e}]$, donc

$$0,11 < \alpha < 0,12 \Rightarrow f(0,11) < f(0,12) < f(0,12)$$

Comme $f(0,11) \simeq 4,04$ et $f(0,12) \simeq 4,16$, et que g est décroissante sur $]\sqrt{e}, +\infty[$, on a :

$$f(0,11) < f(0,12) < f(0,12) \Rightarrow g(f(0,12)) < g(f(0,11)) < g(f(0,11))$$

On a enfin $g(f(0,11)) \simeq 3,094 \times 10^{-4}$ et $g(f(0,12)) \simeq 2,415 \times 10^{-4}$. On en déduit une valeur approchée de $h(\alpha) = g(f(\alpha))$ à 10^{-4} près, par exemple $2,8 \times 10^{-4}$.