Lycée de la Plaine de l'Ain - Ambérieu en Bugey.

Année scolaire 2001 / 2002.

TERMINALES SCIENTIFIQUES

BACCALAUREAT BLANC

EPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures.

>>> Calculatrice et formulaire officiel autorisés. <<<

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction
interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 commun à tous les candidats ; 5 points.

Pour les questions ① et ②, les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.
M. Martin a 17 cravates : 12 cravates à motifs et 5 cravates unies.
Il range toujours 10 cravates (7 à motifs et 3 unies) du côté gauche de son armoire
et 7 cravates (5 à motifs et 2 unies) de l'autre côté.

① M. Martin devant partir en voyage pendant 3 jours a besoin de 3 cravates.
Pour cela, il choisit 3 cravates simultanément et au hasard du côté gauche de son armoire.
Soit X le nombre de cravates à motifs qu'il choisit.
a) Calculer la loi de probabilité de X.
b) Calculer $E(X)$ et interpréter ce résultat.

② Lorsqu'il ne voyage pas, pour déterminer la cravate qu'il portera dans la journée, M. Martin utilise la méthode suivante : il choisit un côté de l'armoire au hasard, de façon équiprobable, et il prend ensuite une cravate, toujours au hasard, sur le côté choisi. On considère les événements suivants :
G : « M. Martin choisit le côté gauche de l'armoire » ;
D : « M. Martin choisit le côté droit de l'armoire » ;
M : « M. Martin tire une cravate à motifs » ;
U : « M. Martin tire une cravate unie ».
a) Calculer $p(M)$.
b) Calculer la probabilité conditionnelle de G sachant que M est réalisé.

③ Tous les jours, pendant n jours, M. Martin effectue son choix en suivant la méthode indiquée en ②.
Chaque soir, il remet la cravate utilisée pendant la journée à sa place.
a) Calculer en fonction de n la probabilité p_n pour qu'il ait pris au moins une cravate à motifs.
b) Calculer la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n \geq 0,99$.

Exercice 2 pour les NON SPECIALISTES ; 5 points.

On se propose de déterminer quels sont les nombres complexes solutions de l'équation : $z^2 - 6z + 12 = 0$ et de placer, par une construction géométrique, les images de ces nombres dans le plan complexe.

① a) Résoudre l'équation $z^2 - 6z + 12 = 0$.
On notera u et $\overline{u}$ ses solutions, u étant celle dont la partie imaginaire est positive.
b) Calculer le module et un argument de u ; en déduire le module et un argument de $\overline{u}$.

② a) On considère le nombre complexe $u - 4$.
Ecrire ce nombre sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.
b) Calculer le module et un argument du nombre : $\dfrac{u}{u-4}$. En déduire le module et un argument de $\dfrac{\overline{u}}{\overline{u}-4}$.

③ Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé $\left(O ; \vec{i} ; \vec{j}\right)$, on note A le point d'affixe 4, B le point d'affixe 2 et C le point d'affixe 6. M et N sont les points d'affixes u et $\overline{u}$.
a) En interprétant géométriquement les résultats précédents, démontrer que les points O, A, M et N sont sur un même cercle que l'on précisera.
b) Démontrer que les points B, C, M et N sont aussi sur un même cercle que l'on précisera.
c) Construire les deux cercles ainsi obtenus, et les deux points M et N.

Exercice 2 pour les SPECIALISTES ; 5 points.

L'objet de cet exercice est de démontrer une propriété géométrique par deux méthodes différentes.
Dans le plan orienté, on considère quatre points non alignés E, F, G, H tels que $EFGH$ soit un parallélogramme de centre O (ne pas faire de figure avant que l'énoncé ne le demande).
On appelle A l'image de G par la rotation r de centre O et d'angle $\dfrac{-\pi}{2}$.
On appelle B l'image de H par la rotation r' de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
On note I le milieu du segment $[GH]$.

La propriété à démontrer est la suivante :
« La médiane $[OI]$ du triangle OGH est une hauteur du triangle OAB, et $OI = \dfrac{1}{2}AB$. »

<u>Première méthode</u> : emploi des nombres complexes.
Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O ; \vec{u} ; \vec{v}\right)$,
O étant toujours le centre du parallélogramme $EFGH$.
On suppose dans cette partie que l'affixe du point G est 1,
et que celle du point H est un nombre complexe z non nul, fixé.

① Réaliser une figure (unité graphique : 5 cm).

② Calculer les affixes des points I , A et B en fonction éventuellement de z .
③ a) A quelle condition sur leurs affixes complexes les points O et I seraient-ils confondus ?
b) Montrer qu'ils sont distincts.
c) Montrer de la même façon que les points A et B sont distincts.
④ Conclure.

Deuxième méthode : emploi des transformations.
Dans cette partie, on n'utilisera aucun calcul sur les nombres complexes,
mais la figure n'est pas à refaire.
Les affirmations devront être soigneusement justifiées par des propriétés géométriques.
On désigne par h l'homothétie de centre G et de rapport 2.

① Déterminer les images par h des points O et I .
② Déterminer l'image par r' du point E .
③ Conclure.

Problème commun à tous les candidats ; 10 points.

Partie A : étude d'une fonction numérique.
On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=x+e^{-x}$.

Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal direct $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ du plan.

L'unité graphique est de 1 centimètre.

① a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
b) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
② Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
③ a) Montrer que la droite (D) d'équation $y=x$ est asymptote à (C).
b) Etudier la position de (C) par rapport à (D).
④ Tracer (C) et (D) dans le repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.

Partie B : étude d'une transformation du plan.
Soit l'application r du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z ,
fait correspondre le point M' d'affixe z' définie par : $z'=\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)z$.

① Quelle est la nature de r ?
② On pose $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$ où x, y, x', y' sont quatre réels.
a) Calculer z en fonction de z' .
b) En déduire x et y en fonction de x' et y' .
③ On suppose que le point M de coordonnées $(x\,;y)$ appartient à (C).
Montrer que les coordonnées $(x'\,;y')$ de M' image de M par r vérifient la relation :
$y'=-x'+\sqrt{2}\ln\left(x'\sqrt{2}\right)$.

Partie C : étude d'une fonction numérique.

On considère la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $g(x)=-x+\sqrt{2}\ln\left(x\sqrt{2}\right)$.

Soit (C') sa représentation graphique dans le repère $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$.

① Etudier les limites de g en O et en $+\infty$.

② Etudier les variations de g.

③ En utilisant éventuellement les résultats obtenus dans la partie B, tracer la courbe (C') dans le même repère que la courbe (C).

④ Soit k un réel fixé.
Discuter, suivant les valeurs de k, le nombre de solutions de l'équation $g(x)=k$.

Le reconnaissez-vous ?
Quel est son surnom ?

A MEDITER **APRES** LE BAC BLANC

Sur l'enseigne du barbier de Séville, on peut lire :
« Je rase tous les hommes de Séville qui ne se rasent pas eux-mêmes et seulement ceux-là ».

- Question : qui rase le barbier ?
- Question subsidiaire : qui est l'auteur de ce texte ?