ENONCE :

Le plan est rapporté au repère orthonormal ($O, \vec{i}, \vec{j}$), unité 2 cm.

On désigne par $\mathcal{C}$ la représentation graphique de la fonction ln,

et par $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = x - 1$;

1°) Soit f la fonction définie sur $]\,0, +\infty\,[$ par $f(x) = \ln x - x + 1$.

a) Etudier le sens de variation de f, et calculer $f(1)$.

b) En déduire le signe de f, puis la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{D}$.

2°) Démontrer que la fonction G définie sur $]\,0, +\infty\,[$ par $G(x) = x\ln x - x$ est une primitive de la fonction ln sur $]\,0, +\infty\,[$.

3°) Déterminer, en cm², l'aire de la partie du plan limitée par $\mathcal{C}$, la droite $\mathcal{D}$ et la droite d'équation $x = 2$.

Eléments de correction

Le plan est rapporté au repère orthonormal ($O, \vec{i}, \vec{j}$), unité 2 cm.

$\mathcal{C}$ représentation graphique de la fonction ln, et $\mathcal{D}$ droite d'équation $y = x - 1$;

1°) f fonction définie sur] 0, + ∞ [par $f(x) = \ln x - x + 1$.

a) $f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1-x}{x}$ du signe de $1 - x$ car x > 0.

$f(1) = \ln 1 - 1 + 1 = 0$

$\boxed{f(1) = 0}$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	−	
$f(x)$	‖	↗	0	↘	

b) $\boxed{f \leq 0}$ car f admet un maximum nul.

Position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{D}$:

$\ln x - (x - 1) = \ln x - x + 1 = f(x)$ et $f(x) \leq 0$ donc $\boxed{\mathcal{C} \text{ est au-dessous de } \mathcal{D}}$:

2°) $G'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$

donc $\boxed{G \text{ est une primitive de la fonction } \ln \text{ sur }]\,0, +\infty\,[}$.

3°) A $= \int_1^2 (x - 1) - \ln x \, dx$ car $\mathcal{C}$ est au-dessus de $\mathcal{D}$;

A $= \left[\dfrac{x^2}{2} - x - G(x) \right]_1^2 = \left[\dfrac{x^2}{2} - x - (x \ln x - x) \right]_1^2$

A $= \left[\dfrac{x^2}{2} - x \ln x \right]_1^2 = 2 - 2\ln 2 - \dfrac{1}{2}$

A $= \dfrac{3}{2} - 2\ln 2$ u.a. or 1 u.a. = 4 cm²

D'où $\boxed{\text{A} = 6 - 8\ln 2 \text{ cm}^2}$