INT20070507	*INTEGRATION*	TS

ENONCE :

QCM *(4 points)*

Une seule réponse exacte par question.
La trouver rapporte 1 point, ne pas répondre 0 et se tromper – 0,5 …
Aucune justification n'est demandée dans ce QCM.

1	Parmi ces quatre intégrales, une seule est égale à 0,69. Laquelle ?	
	❑ $\mathrm{I} = \int_{e}^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx$	❑ $\mathrm{J} = \int_{0}^{\ln 3} \frac{e^x}{1+e^x} dx$
	❑ $\mathrm{K} = \int_{0}^{1} (x + 0{,}19)\, dx$	❑ $\mathrm{L}(x) = \int_{x}^{2x} \frac{1}{t} dt$, pour $x > 0$.

2	Parmi ces quatre intégrales, une seule est non nulle. Laquelle ?	
	❑ $\mathrm{I} = \int_{0}^{2\pi} \sin x \, dx$	❑ $\mathrm{J} = \int_{-1}^{1} \frac{x \sin(x^2)}{1+x^2} dx$
	❑ $\mathrm{K} = \int_{0}^{1} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) dx$	❑ $\mathrm{L} = \int_{-1}^{1} x e^x \, dx$

3	La fonction F définie sur IR par F (x) = $\int_{0}^{x} e^{-t^2} dt$ est :	
	❑ croissante sur IR	❑ décroissante sur IR
	❑ croissante sur IR⁻, puis décroissante sur IR⁺	❑ décroissante sur IR⁻, puis croissante sur IR⁺

1	**Question avec prise d'initiative** : Dans un repère orthogonal, l'aire en unité d'aire, du domaine D ensemble des points M (x,y) tels que $\begin{cases} x \leq 0 \\ 0 \leq y \leq e^x \end{cases}$ est :	
	❑ e	❑ 1
	❑ e^{-1}	❑ $\mathrm{e} - 1$

Eléments de correction

1	Parmi ces quatre intégrales, une seule est égale à 0,69. Laquelle ?	
	❑ $\mathrm{I} = \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx$	❑ $\mathrm{J} = \int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{1+e^x} dx$
	☒ $\mathrm{K} = \int_0^1 (x + 0{,}19) dx$	❑ $\mathrm{L}(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt$, pour $x > 0$.

2	Parmi ces quatre intégrales, une seule est non nulle. Laquelle ?	
	❑ $\mathrm{I} = \int_0^{2\pi} \sin x \, dx$	❑ $\mathrm{J} = \int_{-1}^{1} \frac{x \sin(x^2)}{1+x^2} dx$
	❑ $\mathrm{K} = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) dx$	☒ $\mathrm{L} = \int_{-1}^{1} x e^x \, dx$

3	La fonction F définie sur IR par F $(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ est :	
	☒ croissante sur IR	❑ décroissante sur IR
	❑ croissante sur IR$^-$, puis décroissante sur IR$^+$	❑ décroissante sur IR$^-$, puis croissante sur IR$^+$

1	**Question avec prise d'initiative** : Dans un repère orthogonal, l'aire en unité d'aire, du domaine D ensemble des points M (x,y) tels que $\begin{cases} x \le 0 \\ 0 \le y \le e^x \end{cases}$ est :	
	❑ e	☒ 1
	❑ e $^{-1}$	❑ $\mathrm{e} - 1$

1. **Réponse** ***K*** $K = \int_0^1 (x + 0{,}19) \, dx = \left[\frac{x^2}{2} + 0{,}19x \right]_0^1 = \frac{1}{2} + 0{,}19 = 0{,}69$

Bien que ce ne soit pas nécessaire, détaillons le calcul des autres intégrales :

❑ Remarquons que :
$$I = \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_e^{e^2} \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx$$

La fonction intégrée est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = \ln x$.

Comme u est positive sur l'intervalle [e ; e^2], une primitive de $\frac{u'}{u}$ est donc $\ln u$ d'où :

$$I = [\ln(\ln x)]_e^{e^2} = \ln(\ln(e^2)) - \ln(\ln e) = \ln 2$$

❑ Là encore, nous avons la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = 1 + e^x$ d'où :

$$J = \int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{1+e^x} dx = \left[\ln\left(1+e^x\right) \right]_0^{\ln 3} = \ln 4 - \ln 2 = \ln 2$$

❑ La fonction L est en fait indépendante de sa variable x :

$$L(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{t} dt = [\ln t]_x^{2x} = \ln(2x) - \ln x = \ln 2$$

2. **Réponse *L***

En effet, on repère de visu que les 3 premières intégrales sont nulles.

- I est l'intégrale d'une fonction périodique :

$$I = \int_0^{2\pi} \sin x \, dx = \left[-\cos x\right]_0^{2\pi} = 0$$

- J est l'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle centré en 0. En effet, posons :

$$f(x) = \frac{x \sin\left(x^2\right)}{1+x^2} \quad \text{pour } x \in [-1 ; 1]$$

L'intervalle $[-1 ; 1]$ est symétrique par rapport à 0 et pour tout x de $[-1 ; 1]$, on a :

$$f(-x) = \frac{-x \sin\left(x^2\right)}{1+x^2} = -f(x)$$

D'où :

$$J = 0$$

- Ceux qui se sont intéressés à la quadrature de la parabole auront vite repéré que K est nulle :

$$K = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{1}{3}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x}{3}\right]_0^1 = 0$$

- Enfin, bien que ce ne soit pas nécessaire, on peut calculer l'intégrale L par parties :

$$L = \int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^x \, dx = \left[x\mathrm{e}^x\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^x \, dx = \left[(x-1)\mathrm{e}^x\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{\mathbf{e}}$$

3. La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F'(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$$

Comme une exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit :

F est croissante sur $\mathbb{R}$

Pour information : on ne peut pas exprimer la fonction F à l'aide des fonctions usuelles. Il s'agit de la fonction erf (de l'anglais "error function") de Gauss très utilisée en probabilité (loi normale).

4. Il s'agit du domaine délimité par la courbe de l'exponentielle, l'axe des abscisses et la droite verticale d'équation $x = 0$. (La domaine n'est pas délimité sur le côté gauche).

On fixe donc un réel A négatif et on calcule l'intégrale :

$$I(A) = \int_A^0 \mathrm{e}^x \, dx = \left[\mathrm{e}^x\right]_A^0 = 1 - \mathrm{e}^A$$

Pour étudier l'aide du domaine D, il suffit d'étudier la limite de $I(A)$ lorsque A tend vers $-\infty$. Comme cette limite existe, le domaine a une aire finie (bien qu'il ne soit pas géométriquement borné) :

$$\lim_{A \to -\infty} I(A) = 1$$

L'aire du domaine $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leqslant 0 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant \mathrm{e}^x\}$ est égale donc égale à :

1 u.a.