NOM	Prénom	Classe

Exercice 5 : Pour les candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité 5 points

Pour chacune des 5 questions, une seule des 3 propositions est exacte.
Le candidat entourera sur l'énoncé la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point; une réponse inexacte enlève 0,5 point; l'absence de réponse est comptée 0 point.Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.
Dans cet exercice, le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

$1-$ Le point M situé sur le cercle de centre $A(-2;5)$ et de rayon $\sqrt{3}$. Son affixe z vérifie:

A - $|z-2+5i|^2=3$ B - $|z+2-5i|^2=3$

C - $|z-2+5i|=3$

$2-$ On considère 3 points A,B,C d'affixes respectives a,b,c, deux à deux distincts et tels que ABC ne soit pas un triangle équilatéral. Le point M est un point dont l'affixe z est telle que les nombres complexes $\frac{z-b}{c-a}$ et $\frac{z-c}{b-a}$ sont imaginaires purs.

A - M est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC

B - M appartient aux cercles de diamètres respectifs $[AB]$ et $[AC]$

C - M est l'orthocentre du triangle ABC

$3-$ Soit A et B les points d'affixes respectives $1+i$ et $5+4i$ et C un point du cercle de diamètre $[AB]$.On appelle G l'isobarycentre des points A,B,C et on note z_G son affixe.

A - $|z_G-3-2,5i|=\frac{5}{6}$ B - $z_G-(1+i)=\frac{1}{3}(4+3i)$

C - $z_G-(3+2,5i)=\frac{1}{3}(4+3i)$

$4-$ Soit z le nombre complexe de module $\sqrt{2}$ et d'argument $\frac{\pi}{3}$. On a alors :

A - $z^{14}=-128\sqrt{3}-128i$ B - $z^{14}=64-64i$

C - $z^{14}=-64+64i\sqrt{3}$

$5-$ On considère le point S d'affixe 3 et le point T d'affixe $4i$. Soit (E) l'ensemble des points d'affixe z telle que $|z-3|=|3-4i|$.

A - (E) est la médiatrice du segment $[ST]$

B - (E) est le cercle de centre Ω d'affixe $3-4i$ et de rayon 3

C - (E) est le cercle de centre S et de rayon 5

NOM	Prénom	Classe

Exercice 5 : Pour les candidats ayant choisi l'enseignement de spécialité   5 points

Pour chacune des 5 questions, une seule des 3 propositions est exacte.
Le candidat entourera sur l'énoncé la lettre correspondant à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte 1 point; une réponse inexacte enlève 0,5 point; l'absence de réponse est comptée 0 point.Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

1 – On considère dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation : $x^2 - x + 4 \equiv 0 \pmod 6$

A - il n'y a aucune solution

B - les solutions vérifient $x \equiv 2 \pmod 6$

C - les solutions vérifient $x \equiv 2 \pmod 6$ ou $x \equiv 5 \pmod 6$

2 – On considère les nombres $n = 1789$ et $p = 1789^{2005}$. On a alors :

A - $n \equiv 4 \pmod{17}$ et $p \equiv 0 \pmod{17}$

B - p est un nombre premier

C - $p \equiv 4 \pmod{17}$

3 – Soit a et b deux entiers naturels non nuls. On pose $N = 15a + 4b$ et $P = 11a + 2b$

A - Tout diviseur commun à N et à P est un diviseur commun à a et à b

B - Si $a = 44$ et $b = 73$ alors $PGCD(N, P) = 14$

C - Si a et b sont premiers entre eux alors $PGCD(N, P) = 14$

4 – On considère la fonction f des variables x et y définie par : $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2y^2 + 5xy$

La surface S est la représentation graphique de la fonction f dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

A - La surface S contient la demi-droite $[Ox)$

B - La surface S contient la demi-droite $[Oy)$

C - L'intersection de la surface S avec le plan d'équation $x = 1$ est une hyperbole

5 – Soit (C) le cylindre d'axe (Oz) dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et contenant le point $A(4, -3, 7)$

A - Le rayon de ce cylindre est $R = 7$

B - La section du cylindre (C) par le plan d'équation $y = 4$ est un cercle

C - La section du cylindre (C) par le plan d'équation $x = 7$ est l'ensemble vide

BACCALAUREAT BLANC : Epreuve de Mathématiques

Mars 2006 – Série S – Durée : 4 heures

L'usage de la calculatrice est autorisé.
Les candidats devront traiter les 5 exercices, l'exercice 5 étant différent selon que les candidats ont choisi ou non l'enseignement de spécialité.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1: 4,5 points

Les parties I et II peuvent se traiter indépendamment l'une de l'autre.

I- L'objectif de cette question est de comparer les deux nombres :

$$A = \frac{\ln 2}{2} \text{ et } B = \frac{\ln 3}{3}$$

1) Emettre une conjecture à l'aide de la calculatrice
2) Démontrer cette conjecture

II – 1) a) Question de cours :
En utilisant le fait que la fonction logarithme transforme les produits en sommes, démontrer que :
pour tout réel x strictement positif , $\ln\sqrt{x} = \frac{1}{2}\ln x$

b) Démontrer que pour tout réel u strictement positif : $\ln u \leq u$
(on pourra étudier la fonction h définie par $h(u) = u - \ln u$)

c) En déduire que pour tout réel x strictement positif : $\ln\sqrt{x} \leq \sqrt{x}$
puis que pour tout réel x de $[1,+\infty[$: $0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$

d) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$

2) On définit la suite (u_n), pour tout n entier naturel strictement positif, par :

$$u_n = \frac{\ln n}{n}$$

a) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang que l'on précisera
b) Etablir la limite de la suite (u_n)

Exercice 2: 3 points

Soit n un entier naturel non nul.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère

les points M_n d'affixes $z_n = \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}(-1+i)$

1) a) Calculer la distance OM_n. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} OM_n$

b) Déterminer un argument de z_n. En déduire que les points M_n sont alignés sur une demi-droite dont on précisera une équation

c) Placer sur une figure (unité : 10 cm) les points M_1, M_2, M_3, M_4

2) On définit pour tout n entier naturel non nul le point P_n d'affixe $z'_n = z_n - i$

a) Par quelle transformation du plan P_n est-il l'image de M_n ?

b) En déduire l'alignement des points P_n. Donner une équation de la droite qui les contient

Exercice 3 : 3 points

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On désigne par S_n la somme des cubes des n premiers entiers naturels impairs :

$$S_n = 1^3 + 3^3 + 5^3 + ... + (2n-1)^3$$

Par exemple, $S_3 = 1^3 + 3^3 + 5^3 = 153$

1) Démontrer par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = 2n^4 - n^2$

2) Déterminer n tel que : $1^3 + 3^3 + 5^3 + ... + (2n-1)^3 = 913276$

Formulaire : $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Exercice 4 : 4,5 points

Partie A :

La fonction f est définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par :

$$f(x)=(20x+10)e^{-\frac{1}{2}x}$$

1 - Etudier la limite de f en $+\infty$

(on pourra utiliser le changement de variable $X=\frac{x}{2}$ ainsi que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$)

2 - Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations

3 - Etablir que l'équation $f(x)=10$ admet une unique solution strictement positive α dans l'intervalle $]0,+\infty[$.

Donner une valeur décimale approchée de α à 10^{-3}près

Partie B :

On note $y(t)$ la valeur, en degrés Celsius, de la température d'une réaction chimique à l'instant t, t étant exprimé en heures. La valeur initiale, à l'instant $t=0$, est $y(0)=10$.

On admet que la fonction qui, à tout réel t appartenant à l'intervalle $[0,+\infty[$ associe $y(t)$,

est solution de l'équation différentielle (E) : $\quad y'+\frac{1}{2}y=20e^{-\frac{1}{2}t}$

1 - Vérifier que la fonction f étudiée dans la partie A est solution de l'équation différentielle (E) sur $[0,+\infty[$

2 - On se propose de démontrer que cette fonction f est l'unique solution de l'équation différentielle (E), définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$, qui prend la valeur 10 à l'instant 0.

a) On note g une solution quelconque de l'équation différentielle (E), définie sur $[0,+\infty[$, et vérifiant $g(0)=10$

Démontrer que la fonction $g-f$ est solution, sur l'intervalle $[0,+\infty[$, de l'équation différentielle :

$$(E'):\ y'+\frac{1}{2}y=0$$

b) Résoudre l'équation différentielle (E')

c) Conclure

3 - Au bout de combien de temps la température de cette réaction chimique redescent-elle à sa valeur initiale ? Le résultat sera arrondi à la minute.